Тема лекции:

Движение материальной точки по окружности. Преобразования Галилея

Ускорение материальной точки

Любое механическое движение можно классифицировать как **равномерное** и **неравномерное**. Так как мгновенная скорость является векторной величиной, она может изменяться как по величине, так и по направлению. Из этого следует, что любое криволинейное движение будет неравномерным, поскольку при этом вектор скорости изменяется, по крайней мере, по направлению. *Равномерным может быть только прямолинейное движение с постоянной по величине скоростью.*

Ускорение материальной точки

Быстрота изменения скорости или «скорость изменения скорости» характеризуется вектором **ускорения**

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

средним ускорением за интервал времени Δt. **Мгновенное ускорение** в точке

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Таким образом, ускорение в данный момент времени есть первая производная вектора скорости и вторая производная радиус-вектора по времени.

Ускорение материальной точки

Поскольку закон движения материальной точки $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

то $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$

В рассмотренном в прошлой лекции примере закон движения задан уравнениями $x = 0$, $y = y(t) = bt$, $z = z(t) = z_0 - at^2/2$, и скорость $v_x = 0$, $v_y = b$, $v_z = -at$, а ускорение $a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_z = -a$.

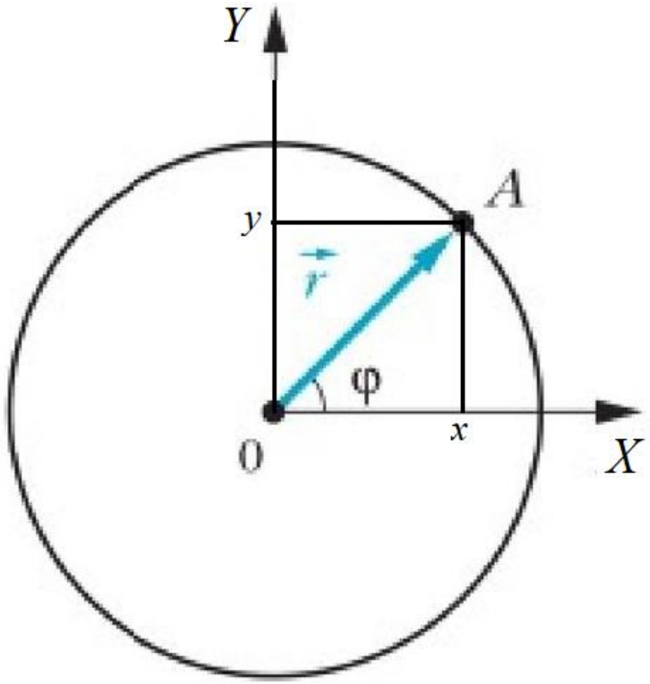
Направление ускорения материальной точки

Как мы видим, ускорение так же как и скорость, является векторной величиной. Но если вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории, то как направлен вектор ускорения?

При прямолинейном движении вектор ускорения направлен вдоль траектории по направлению движения, если скорость увеличивается и против направления при уменьшении скорости.

А если движение криволинейное?

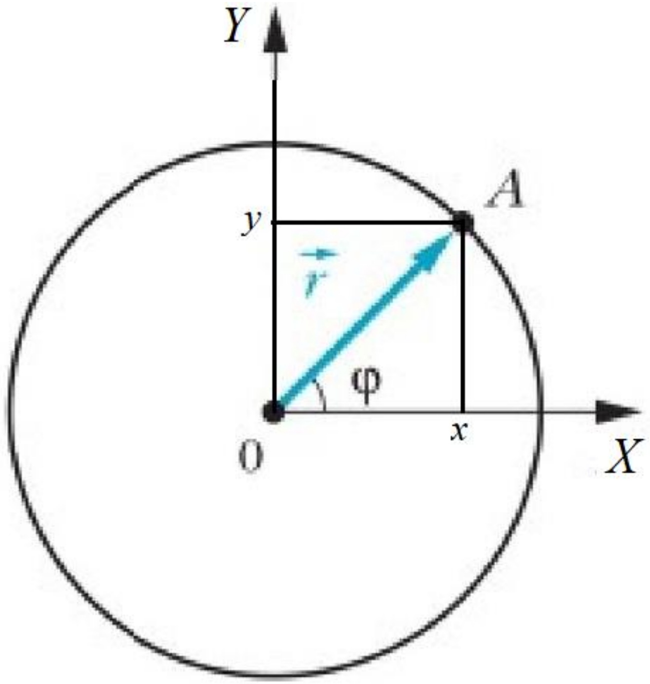
Равномерное движение по окружности



Для того, чтобы понять, как направлено ускорение при криволинейном движении, рассмотрим простейший случай такого движения – равномерное движение материальной точки по окружности.

Пусть в плоскости *XOY* точка *A* двигается по окружности радиуса $\vec{r}$. Положение точки определяется углом φ, отсчитываемым от оси x.

Равномерное движение по окружности



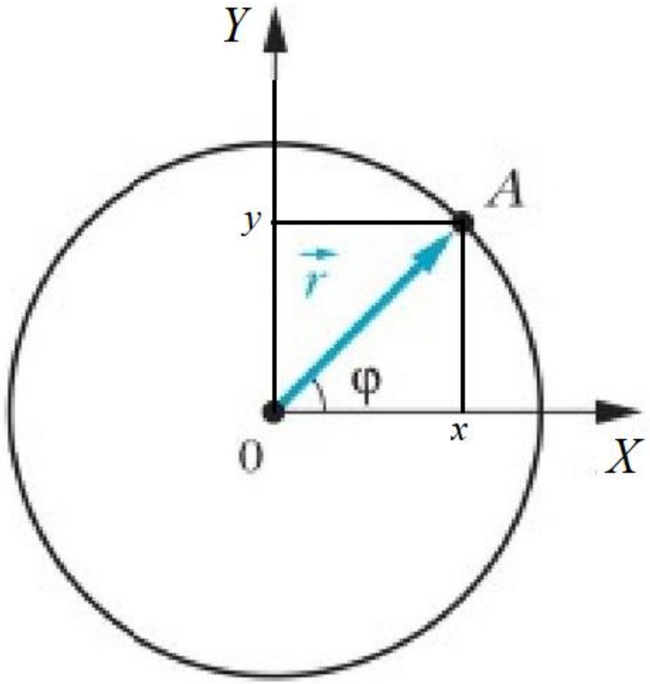
Таким образом, радиус-вектор точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = const$$

причем
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (1).$$

При равномерном движении точки по окружности угол поворота φ радиус-вектора пропорционален времени t: $\varphi \sim t$, то есть $\varphi = \omega t$, $\omega = const$ - коэффициент пропорциональности, который можно назвать угловой скоростью. Эта величина измеряется в единицах рад/с.

Равномерное движение по окружности



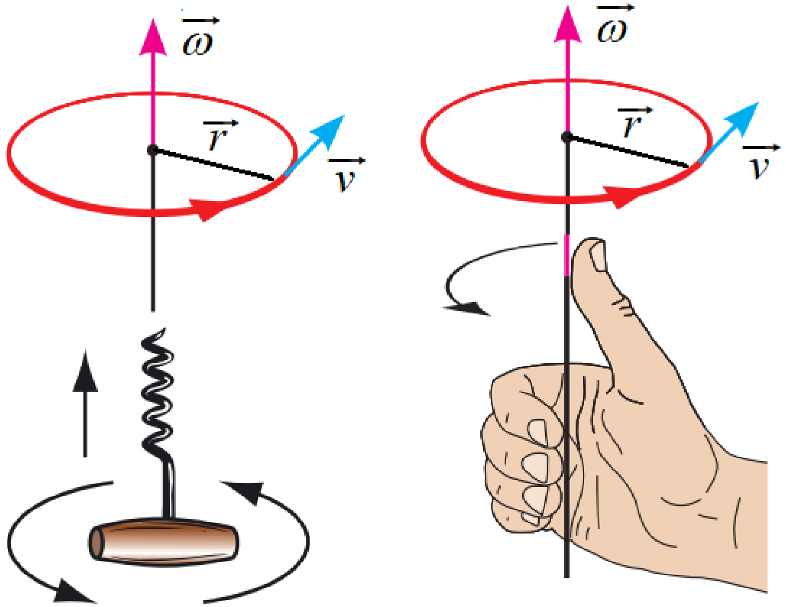
Если полный оборот совершается за время T, то $\omega = \frac{2\pi}{T}, \frac{1}{T} = \nu$, здесь T – период вращения, ν - частота вращения. В общем случае величина угловой скорости определяется как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, при равномерном вращении ω = *const*, и точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью.

Как связана угловая скорость с линейной? Дифференцируя (1) по времени (см. предыдущий слайд), имеем:

$$\begin{cases} v_x = -r\omega \sin \omega t \\ v_y = r\omega \cos \omega t \end{cases}$$

откуда $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$ - соотношение, связывающее линейную и угловую скорости.

Угловая скорость

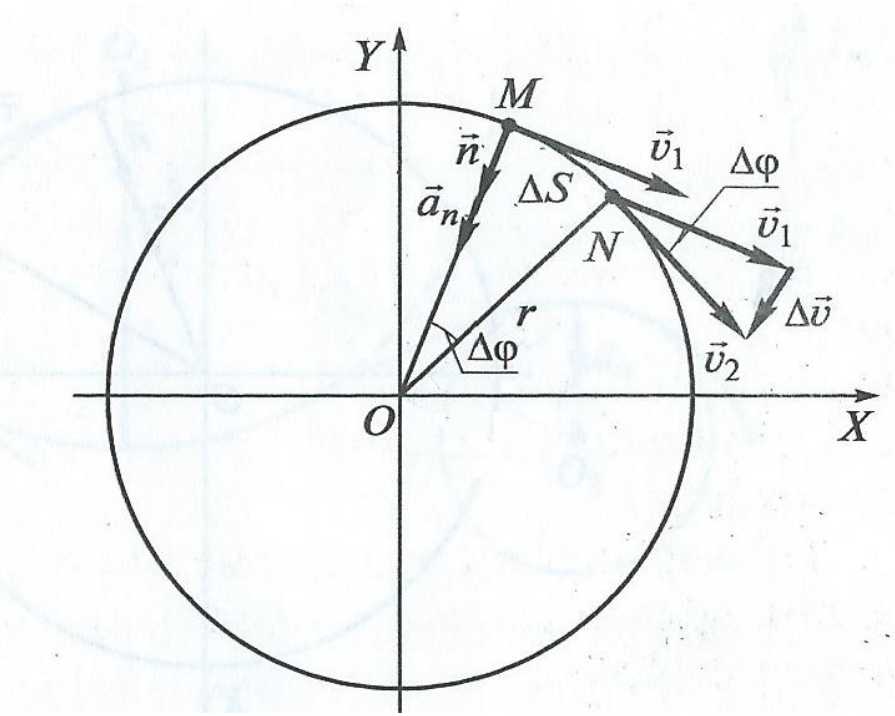


Угловую скорость ω можно определить как вектор, который будет задавать:

1. Величину угловой скорости,
2. Положение оси, вокруг которой происходит вращение,
3. Направление вращения (по или против часовой стрелки).

Для этого условились изображать угловую скорость отрезком прямой, лежащей на оси Z, вокруг которой происходит вращение; длина отрезка в некотором масштабе равна величине ω (рис.). а направление связано с направлением вращения радиус-вектора правилом правого винта или правилом правой руки (см. рис.).$\vec{r}$

Ускорение при равномерном движении по окружности



Вектор скорости изменился на величину $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, поэтому $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ - ускорение за интервал времени Δt.

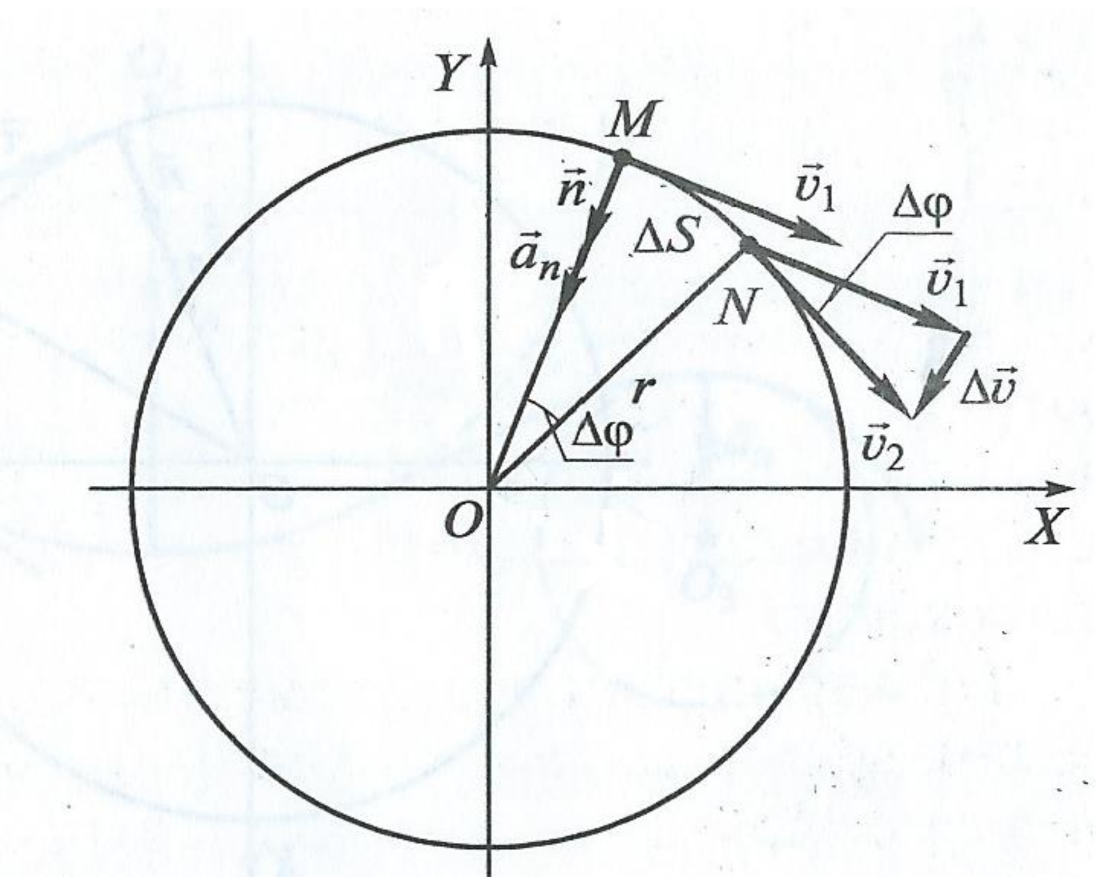
Из рис. видно, что $\Delta v = v_1\Delta\varphi$ и $\Delta S = r\Delta\varphi$, поэтому

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v_1\Delta S}{r}$$,

где ΔS – малая часть окружности. Модуль вектора ускорения в момент времени t

$$\left|\vec{a}(t)\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{r}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$.

Ускорение при равномерном движении по окружности

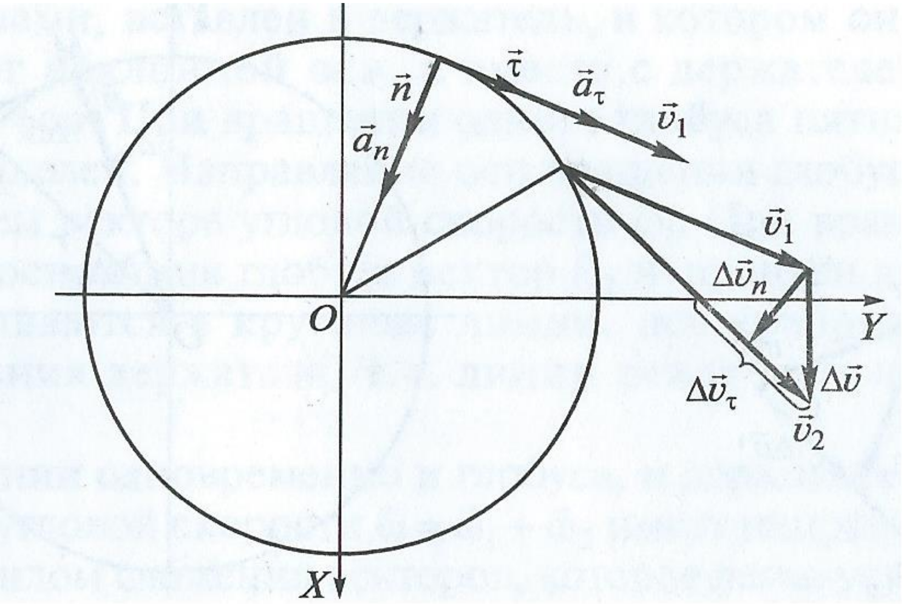


Если мы введем вектор нормали $\vec{n}$ к вектору скорости (см. рис.), то вектор

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

- это вектор **нормального (центростремительного) ускорения** при движении точки по окружности с постоянной по величине скоростью, направленный к центру окружности.

Ускорение при неравномерном движении по окружности



В случае неравномерного движения по окружности вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов – уже полученного $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ -вектора, направленного по касательной к траектории (рис.). Отложим от начала вектора $\vec{v}_2$ отрезок, равный вектору $\vec{v}_1$, и представим $\Delta\vec{v}$ в виде суммы двух векторов – $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau$. Рассмотрим ускорение

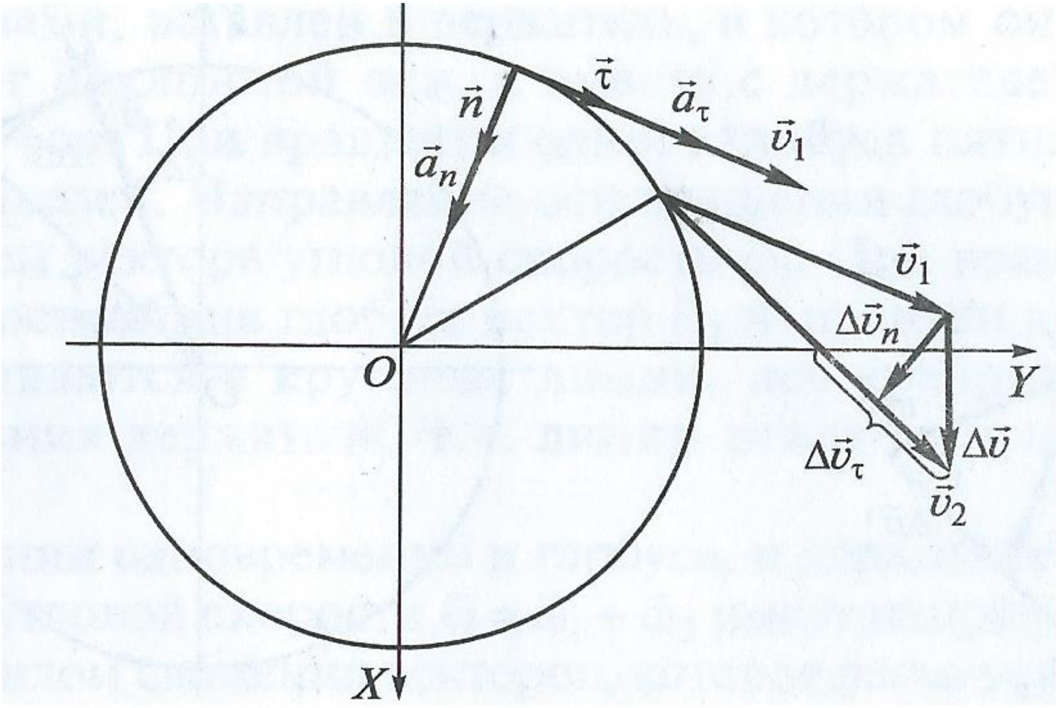
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$$

Первое слагаемое уже определено, это нормальное ускорение. Вектор

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$$

направлен так же, как и $\vec{v}_2$, то есть пределе $\Delta t \to 0$ – вдоль, по касательной к траектории, которая показана вектором $\vec{\tau}$. Это так называемое **тангенциальное ускорение**. Его величина $\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} \right| = \frac{dv}{dt}$ - это скорость изменения абсолютной величины скорости.

Ускорение при неравномерном движении по окружности



Таким образом, полное ускорение в момент времени t

. $$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \frac{v^2}{r}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

При $r \to \infty$ круговая траектория вырождается в прямую линию, нормальное ускорение исчезает и остается только $\vec{a}_\tau$ - ускорение точки при движении вдоль прямой.

При $|\vec{v}|$ = *const* исчезает тангенциальное ускорение и остается только *нормальное (центростремительное) ускорение* $\vec{a}_n$ *, направленное к центру окружности.*

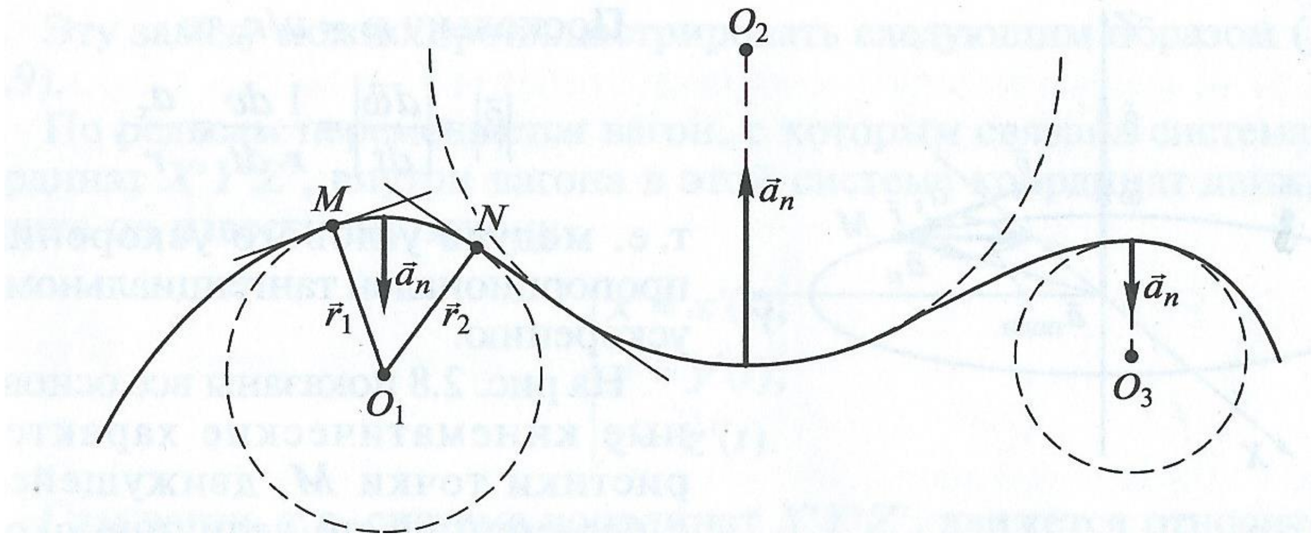
Движение по окружности

Итак:

1. Если точка двигается по окружности с постоянной по модулю скоростью ($|\vec{v}|$ = *const*), то ее ускорение всегда направлено к центру окружности и равно центростремительному или нормальному ускорению $\vec{a}_n$. В этом случае ускорение характеризует только изменение направления вектора скорости.
2. Если точка движется по прямой с переменной скоростью, то вектор ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен вдоль этой прямой и характеризует изменение скорости по абсолютной величине.

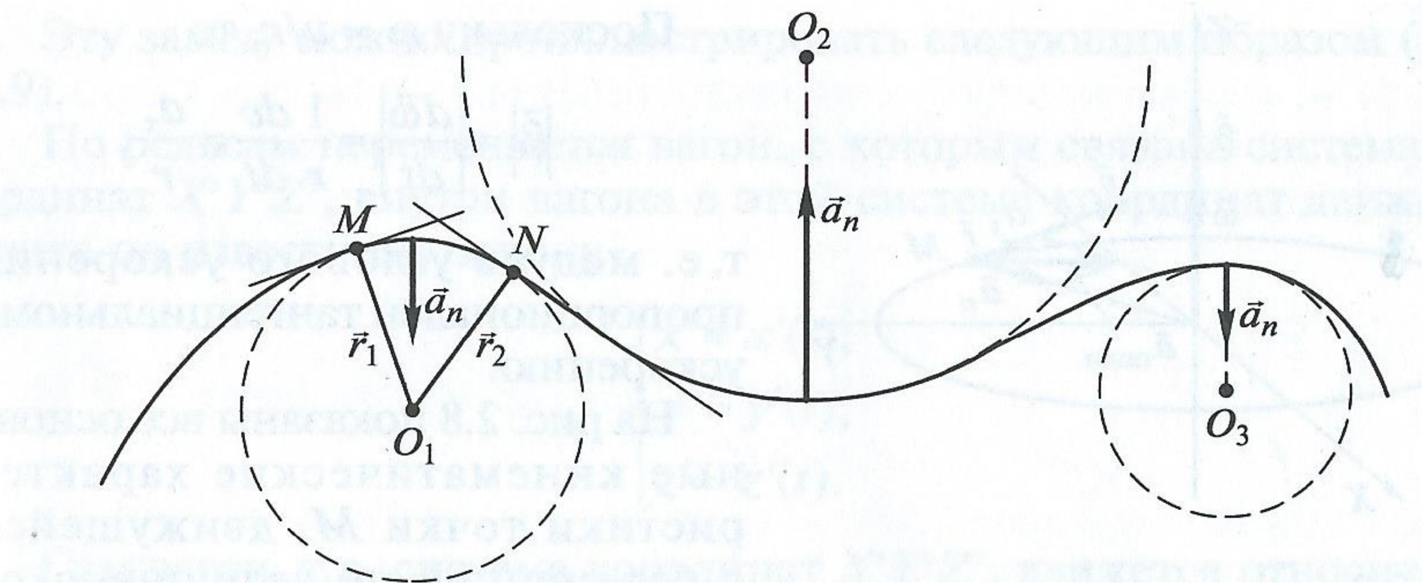
Полученный результат может быть применен к анализу движения материальной точки по любой криволинейной траектории, лежащей в плоскости.

Криволинейное движение



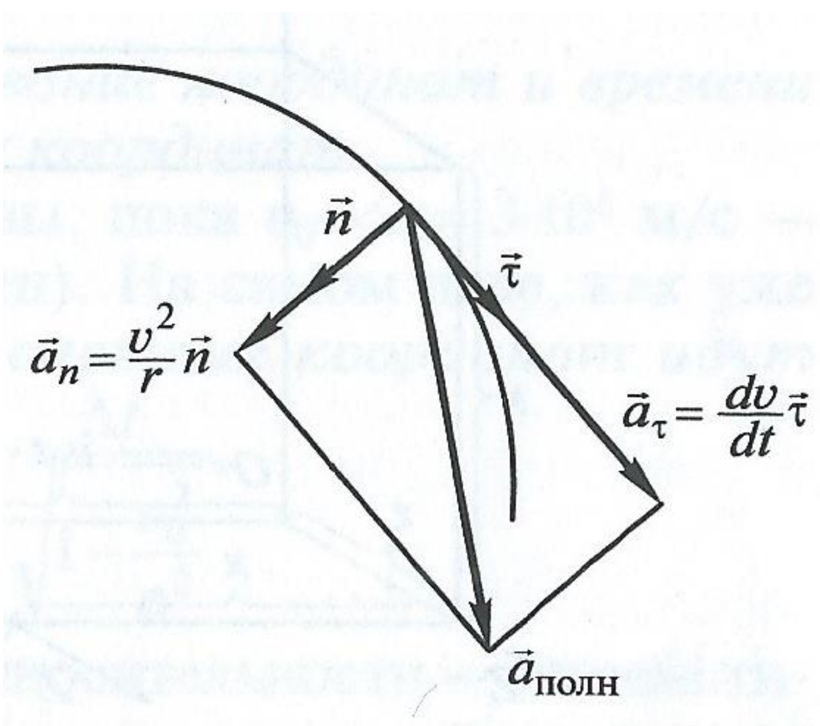
Рассмотрим траекторию произвольной формы (см. рис.). Оказывается, что для любого достаточно малого участка криволинейной траектории можно подобрать окружность, которая будет точно совпадать с этим участком. Возьмем две точки M и N, построим касательные в этих точках и перпендикуляры к ним, которые пересекаются в точке O_1. Вообще $r_1 \neq r_2$. Однако, если точка N приближается к точке M, то при некотором достаточно малом MN $r_1 = r_2 = r$, положение O_1 не будет зависеть от расстояния между M и N, и эта часть траектории будет частью окружности радиуса r.

Криволинейное движение



Величина *r* называется **радиусом кривизны** траектории на данном ее участке. Соответственно, точку O_1 можно назвать **центром кривизны**. При этом можно с уверенностью утверждать, что, если $|\vec{v}| = const$, на этом участке траектории ускорение $\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}$ будет направлено к центру кривизны.

Криволинейное движение



Если же вектор скорости будет изменяться и по величине, и по направлению, то $\vec{a}_{полн} = \frac{v^2}{r}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ (рис.), и вектор $\vec{a}_{полн}$ будет менять свое направление в зависимости от формы траектории и скорости перемещения по ней точки.

Угловое ускорение

В случае неравномерного движения точки по окружности угловая скорость зависит от времени, т.е. $\vec{\omega}(t) \neq \vec{\omega}(t+\Delta t)$.

В этом случае вводится понятие вектора **углового ускорения** $\vec{\beta}$. Эта величина может быть определена, как

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

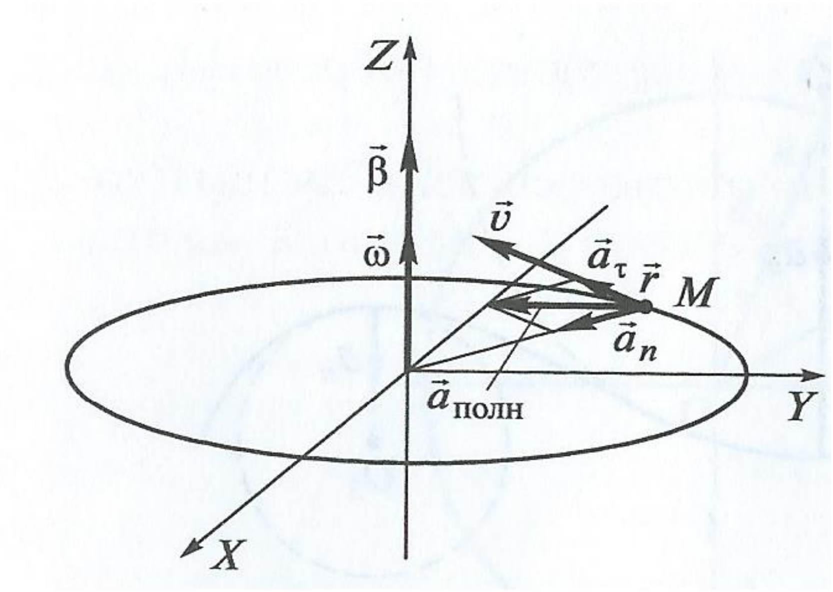
. При постоянной заданной оси вращения - это вектор, направленный параллельно $\vec{\omega}$ вдоль этой оси.

Поскольку ω = v/r, то

$$\left|\vec{\beta}\right| = \left|\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right| = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{a_\tau}{r}$$

то есть модуль углового ускорения пропорционален тангенциальному ускорению.

Угловое ускорение



.

На рис. показаны все основные кинематические характеристики точки М, двигающейся с переменной по величине скоростью по окружности радиуса r. Взаимное расположение величина векторов $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}_{\text{полн}}, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau, \vec{\omega}, \vec{\beta}$ полностью характеризуют кинематику движения по окружности.

Преобразования Галилея

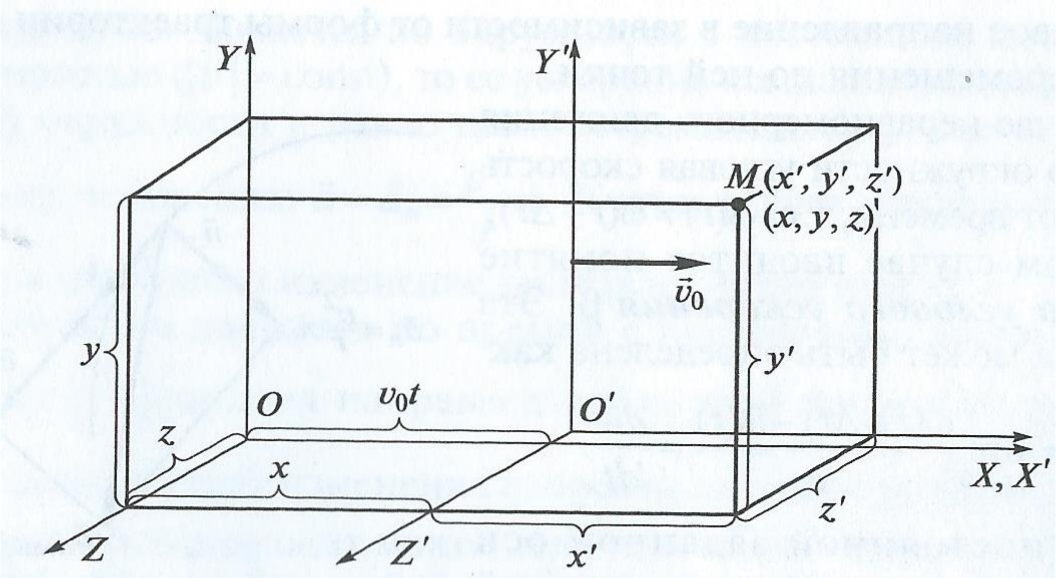
Всякое движение происходит относительно некоторой фиксированной системы координат. Переход к другой, новой системе координат вызывает изменение кинематических характеристик движущихся точек. Поэтому в механике актуальной является следующая задача:

Движение точки определено, то есть, задан закон движения по отношению к некоторой системе координат X', Y', Z'.

Эта система отсчета сама двигается заданным образом относительно другой системы координат X, Y, Z, принятой за неподвижную.

Вопрос: каковы кинематические характеристики движения точки по отношению к этой второй системе координат?

Преобразования Галилея

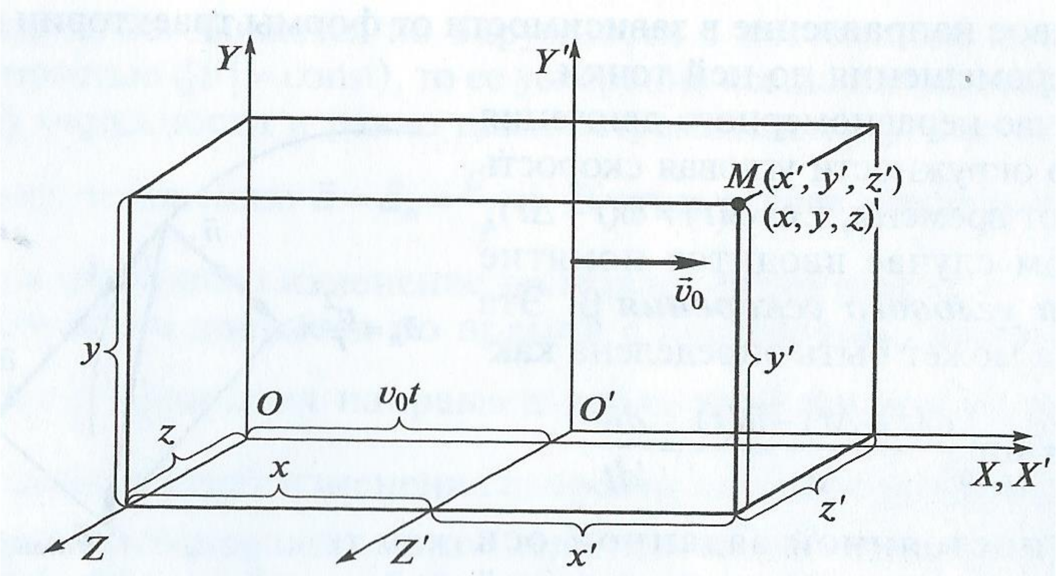


Эту задачу можно проиллюстрировать следующим образом (см. рис.):

По рельсам перемещается вагон, с которым связана штрихованная система координат, внутри вагона в этой системе координат двигается точка по известному закону

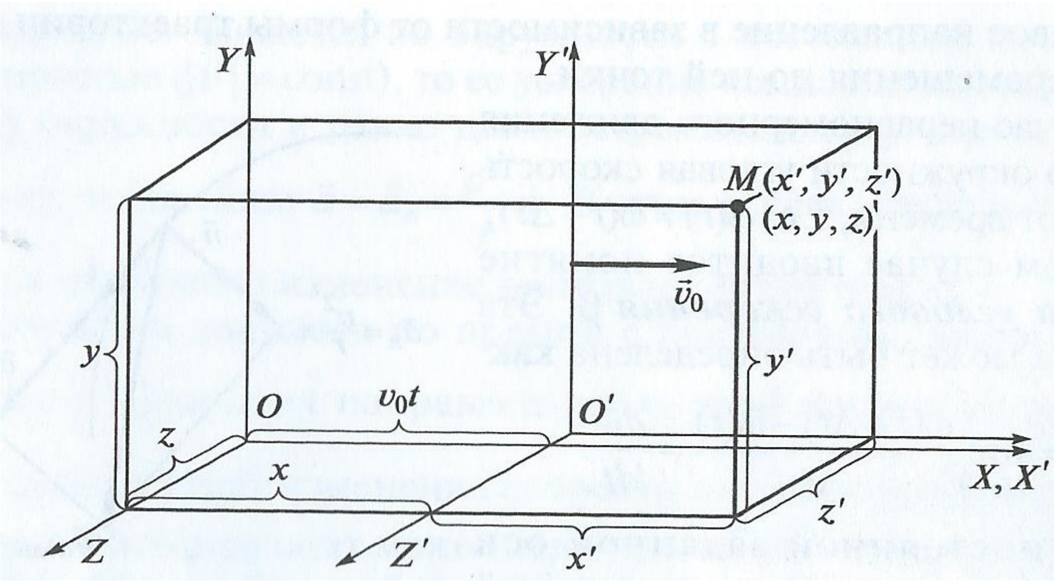
$$\begin{cases} x' = x'(t) \\ y' = y'(t) \\ z' = z'(t) \end{cases}$$

Преобразования Галилея



Сам вагон, то есть штрихованная система координат, движется относительно рельсов, с которыми связана «неподвижная» система координат *X*, *Y*, *Z*, ось *X* направлена вдоль рельсов. Вагон двигается известным образом – *с постоянной скоростью* $\vec{v}_0$ *. Требуется определить закон движения и все кинематические параметры точки в этой условно неподвижной системе координат*.

Преобразования Галилея

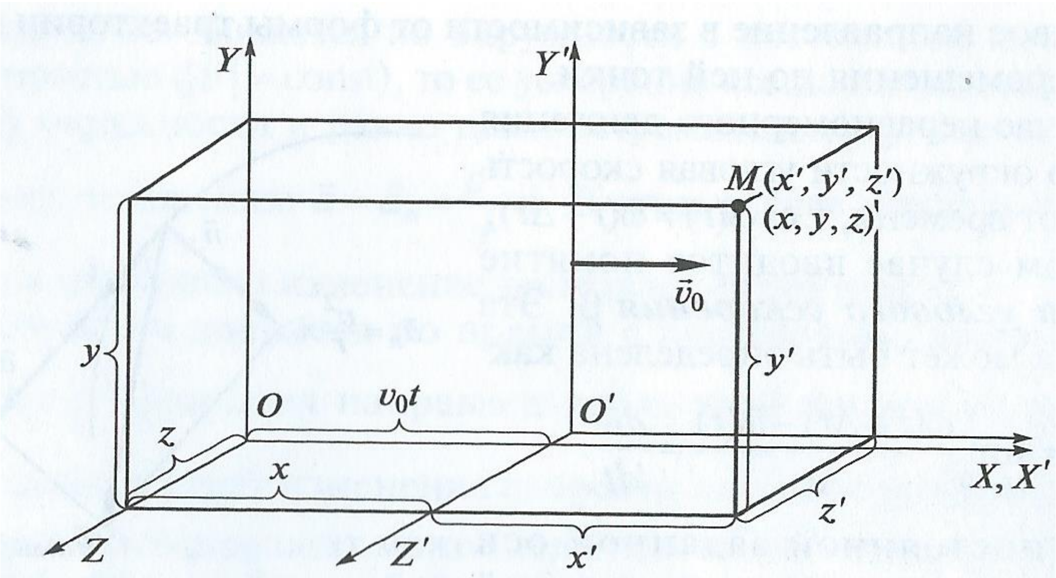


Другими словами, требуется определить закон движения в нештрихованной системе координат

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Итак, система координат X', Y', Z' двигается относительно системы координат X, Y, Z со скоростью $\vec{v}_0$ $(v_0$, 0, 0*)*, то есть вдоль оси X.

Преобразования Галилея



Допустим, что *в обеих системах координат имеются часы,* и в некоторый момент времени, когда O и O' совпадают, $t = t' = 0$, часы синхронизированы и начинают идти. Тогда координаты точки M и отрезки времени в штрихованной системе и в неподвижной системе координат связаны следующим образом (см. рис.)

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases}$$

Эта система представляет *преобразование координат и времени Галилея при переходе к новой системе координат*.

Преобразования Галилея

Дифференцируя уравнения

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases}$$

по времени, имеем

$$\begin{cases} v_x = v_x' + v_0 \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

Обобщая последнюю систему на случай произвольного движения штрихованной системы координат с постоянной скоростью, получаем **классический закон сложения скоростей**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Преобразования Галилея

Дифференцируя еще раз по времени, получаем

$$\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z' \end{cases}$$

То есть **ускорения** во всех системах, движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями, **одинаковы**.

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011, С. 14-22.

Тема следующей лекции:

Динамика материальной точки. Законы Ньютона