Тема лекции:
Динамика материальной точки. Законы Ньютона

Динамика материальной точки

Этот раздел механики позволяет ответить на следующий вопрос: *какие причины* вызывают движение и определяют характер движения материальных тел, их траекторию, скорость, все кинематические характеристики?

Представим себе тело отсчета, систему координат, наблюдателя в ней и материальную точку (некоторое тело), которая двигается относительно системы и наблюдателя *с постоянной скоростью* в каком-то направлении (например, вдоль оси x). Это значит, что тело двигается равномерно и прямолинейно относительно этой системы координат. Других тел, *которые каким-либо образом воздействовали бы на наше – нет, тело изолировано*. Частный случай ситуации, когда $\vec{v} = const$ является $\vec{v} = 0$, то есть состояние покоя относительно выбранной системы координат.

Закон инерции

Естественным состоянием любого материального тела, изолированного от других тел, является движение с постоянной скоростью $\vec{v} = \mathrm{const}$ *(частный случай* $\vec{v} = 0$ *– состояние покоя)*. Кажущееся противоречие с повседневным опытом связано только с трудностями создания действительно полностью изолированного состояния.

Изменение вектора $\vec{v}$ *движущегося тела, то есть возникновение ускорения, всегда связано с его взаимодействием с другими материальными телами*. Возникает вопрос: каким образом эти другие тела взаимодействуют с данным телом и как это взаимодействие можно описать?

Первый закон Ньютона

Ответ на поставленный вопрос содержится в **трех законах Ньютона**, составляющих основу классической механики и играющих огромную роль в классической физике.

Первый закон обычно формулируют как утверждение – постулат о существовании так называемых **инерциальных систем координат.**

Существуют такие системы координат, в которых материальные тела, не взаимодействующие с другими материальными телами, находятся в состоянии равномерного прямолинейного движения с постоянной скоростью или покоятся.

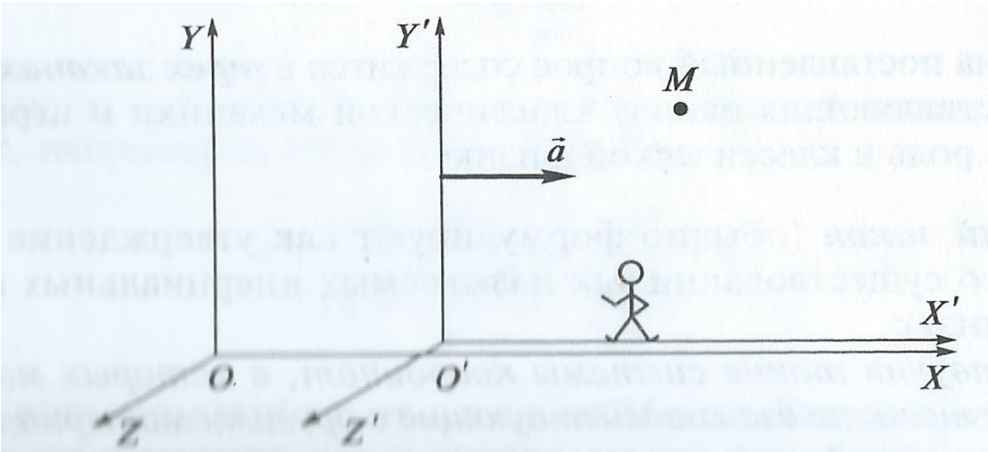
Инерциальные и неинерциальные системы координат

Такие системы координат мы будем называть **инерциальными.** Ясно, что если хотя бы одна инерциальная система существует, то из преобразований Галилея и классического закона сложения скоростей следует, что инерциальными будут и все другие системы координат, которые двигаются относительно первой с постоянной скоростью.

Из опыта следует, что практически идеальной инерциальной системой является *так называемая гелиоцентрическая система, начало которой находится в центре Солнца, а оси координат направлены на удаленные звезды нашей Галактики.*

Неинерциальные системы координат – это такие системы координат, которые двигаются относительно инерциальной с ускорением.

Инерциальные и неинерциальные системы координат



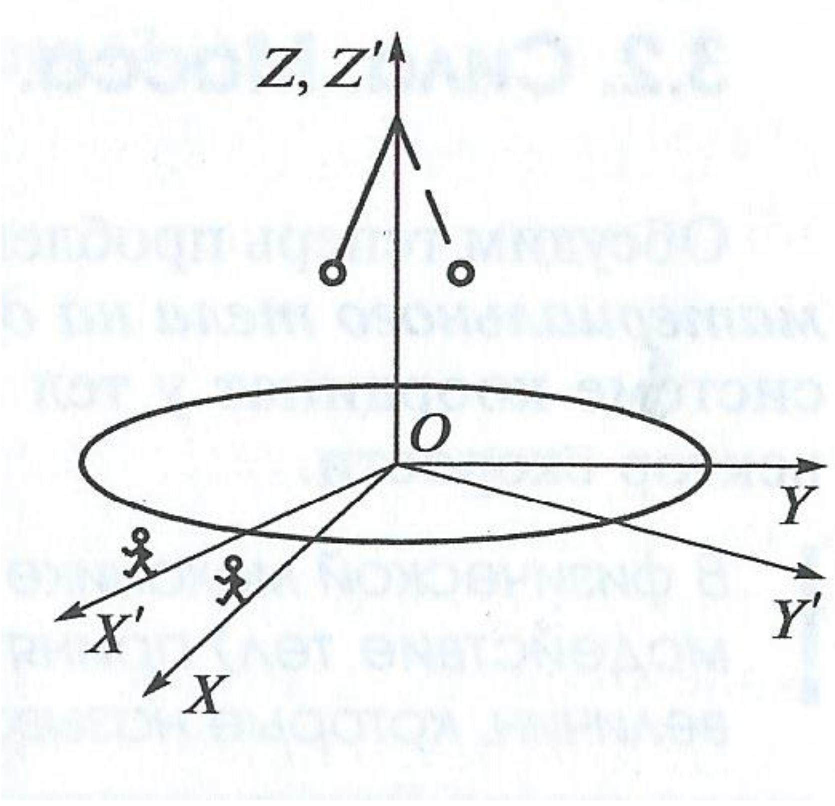
Суть дела заключается в том, что в неинерциальной системе полностью изолированное тело может двигаться относительно находящегося в этой системе наблюдателя с ускорением (см. рис.). Пусть точка *M* *покоится* в инерциальной системе *X, Y, Z,* а система координат *X′*, *Y′*, *Z′* двигается вдоль оси *X* с ускорением $\vec{a}$, то есть эта система **неинерциальная** (см. рис.). Ясно, что для наблюдателя в системе *X′*, *Y′*, *Z′* точка *M* будет двигаться с ускорением $-\vec{a}$. Ясно также, что наблюдатель будет искать причины ускорения, и если он не осведомлен об неинерциальности своей системы координат, то *придет к ложному выводу о наличии других тел, взаимодействующих с данным*.

Инерциальные и неинерциальные системы координат

Мы можем выбрать в качестве тела отсчета Землю и систему координат X', Y', Z', с ней связанную. Однако эта система координат не является инерциальной, так как она двигается с ускорением относительно гелиоцентрической системы координат X, Y, Z: Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца.

Поэтому мы можем наблюдать на поверхности Земли некоторые, на первый взгляд странные явления, *обусловленные исключительно неинерциальностью земной системы координат*. Одно из них заключается в изменении плоскости колебаний маятника на поверхности Земли (маятник Фуко).

Маятник Фуко



Сначала посмотрим на модель: на платформе – маятник, он колеблется в определенной плоскости *yz* относительно некоторой системы координат *X*, *Y*, *Z* (рис.). Представим себе другую систему координат *X′*, *Y′*, *Z′*, которая жестко связана с платформой, причем оси *Z* и *Z*' совпадают; пусть платформа вращается вокруг оси *Z*' с угловой скоростью ω. Очевидно, что наблюдатель в штрихованной системе координат будет фиксировать поворот плоскости колебаний маятника с той же угловой скоростью ω, с какой вращается его система координат.

Итак: для анализа движения материальных тел в какой-то системе координат важно знать, какова эта система – *инерциальная или неинерциальная*.

Второй закон Ньютона

Обсудим теперь проблему *взаимодействия тел, действие одного материального тела на другое* – в результате чего в инерциальной системе координат у тел *появляется ускорение* – изменяется их вектор скорости.

В физической механике воздействие одного тела на другое (взаимодействие тел) принято характеризовать введением векторных величин, которые называются силами.

Физическая сила $\vec{F}$ - *это векторная величина, вызывающая ускорение – изменение скорости тела в инерциальной системе координат и пропорциональная вектору ускорения.*

Вектор $\vec{F}$ совпадает по направлению с вектором ускорения и пропорционален ему.

$$\vec{F} \sim \vec{a}$$

Второй закон Ньютона

Важно: коэффициент пропорциональности, связывающий эти два вектора - скалярная величина, называемая **массой** тела m. Для материальной точки

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1)$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор точки.

Как видно из этого уравнения, *тело приобретает под действием данной силы тем большее ускорение, чем меньше его масса* m $\quad \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

поэтому говорят, что **масса** – *мера инертности тела. Это скалярная величина, присущая любому материальному телу.*

Уравнение (1) есть математическая формулировка **второго закона Ньютона**.

Единица силы

Ускорение измеряется в м/с^2. Масса измеряется в кг, эталонная масса в 1 кг хранится в палате мер и весов. *Если тело массой в 1 кг получает ускорение в 1 м/с^2, то говорят, что на тело действует сила 1 кг·1 м/с^2 = 1* $\frac{кг \cdot м}{с^2}$ *= 1 Ньютон.*

Уравнения второго закона Ньютона

Уравнения движения Ньютона для материальной точки вдоль координатных осей

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Эти уравнения позволяют решить основную задачу механики – определение закона движения $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ при известном взаимодействии между телами. Нужно только знать какие-то конкретные формулы, выражения для сил, действующих между телами; мы можем предположить, что сами силы зависят от положения тел и их скоростей.

Уравнения второго закона Ньютона

Проблема становится *чисто математической*: для нахождения закона движения надо совместно решить три дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}). \end{cases}$$

Роль начальных условий

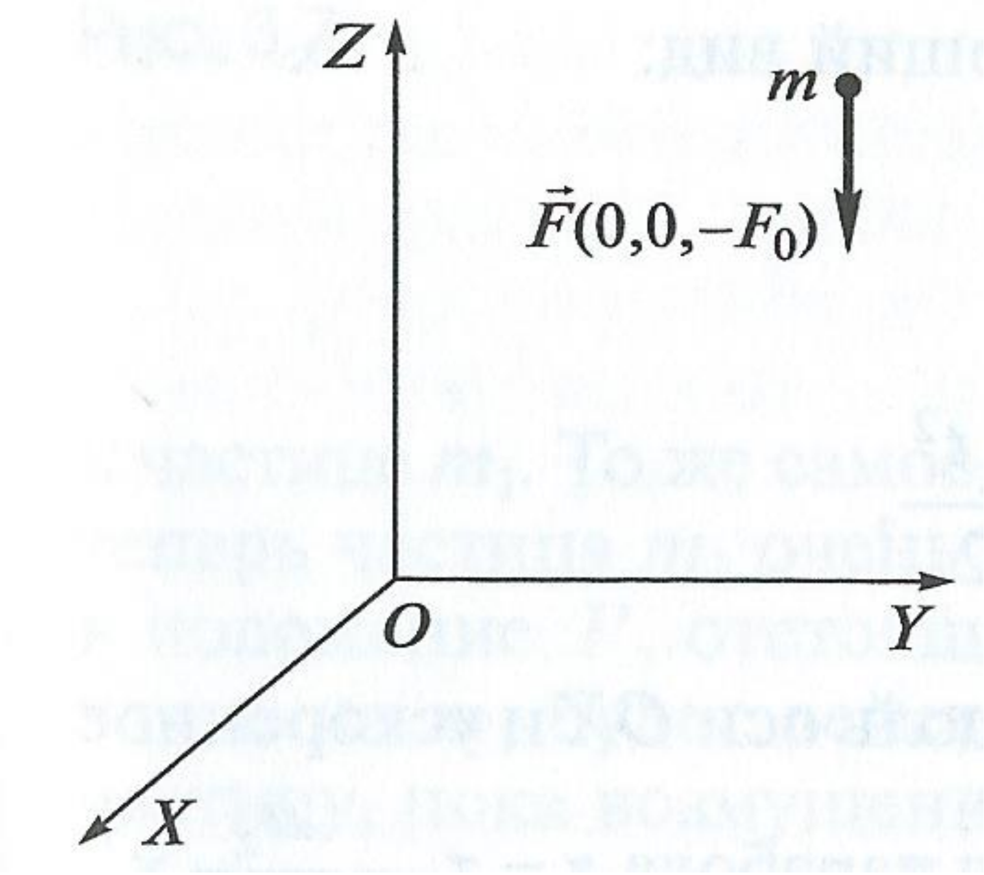
Решение (интегрирование) дифференциальных уравнений всегда приводят к появлению произвольных постоянных – для трех уравнений второго порядка имеется всего 6 *таких постоянных*.

Чтобы их определить, нужно задать так называемые **начальные условия** – где находилось и с какой скоростью двигалось тело при $t = 0$:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = v_{y0} \\ v_z = v_{z0} \end{cases}$$

После задания начальных условий решение уравнений движения дает однозначный результат: движение тела оказывается *полностью детерминированным*.

Пример

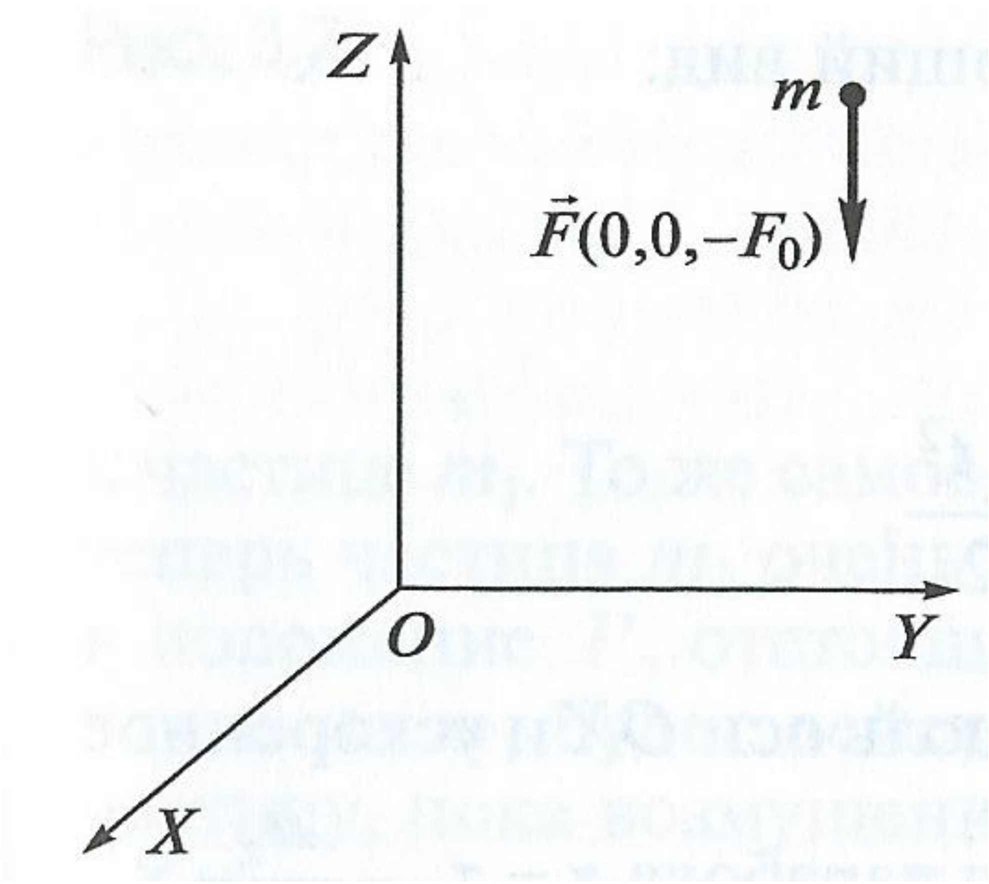


Пусть на материальную точку с массой m действует сила (см. рис.)

$$\vec{F} = (0, 0, -F_0)$$

Определить закон движения и траекторию точки.

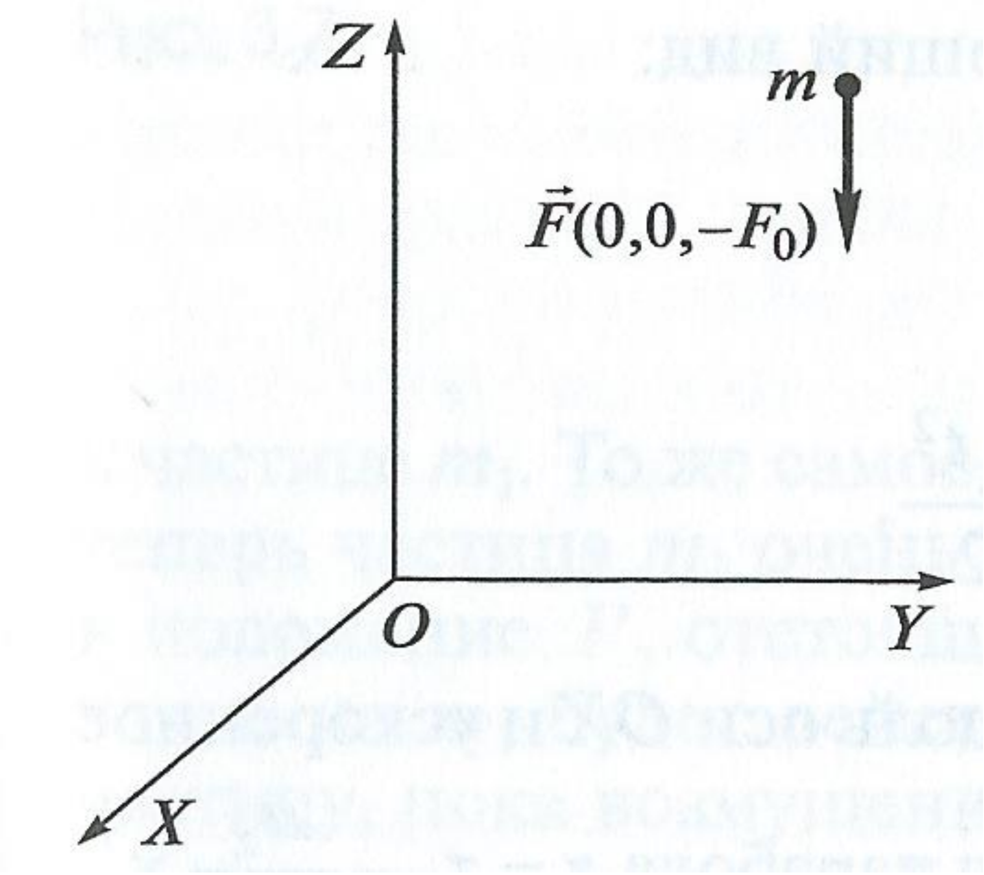
Пример



Запишем дифференциальные уравнения второго закона Ньютона

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=0, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-F_0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=-\dfrac{F_0}{m}. \end{cases}$$

Пример

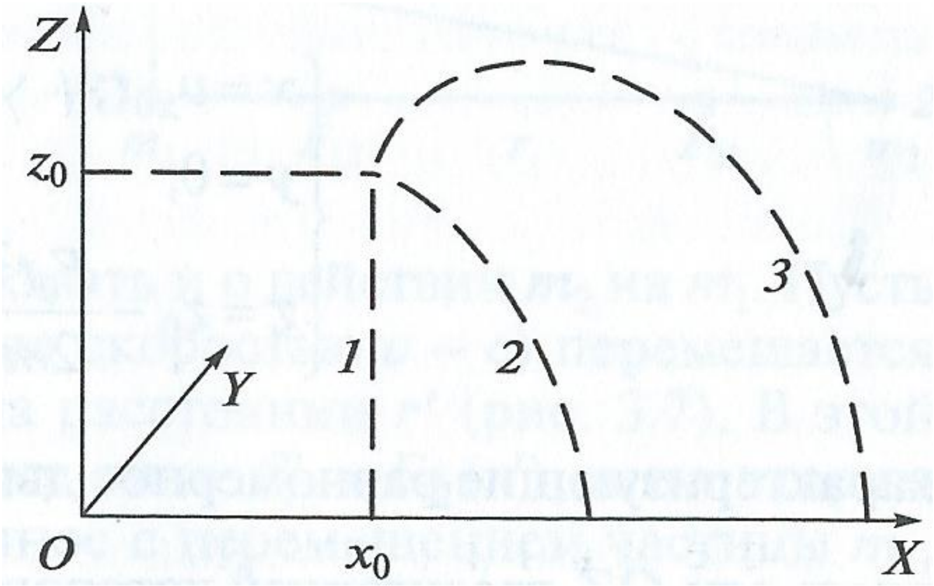


Эти уравнения имеют решение, которое легко найти:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = C_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = C_2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{F_0}{m}t + C_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = C_1 t + C_4, \\ y = C_2 t + C_5, \\ z = -\dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{t^2}{2} + C_3 t + C_6. \end{cases}$$

Здесь C_1, $C_2, \ldots,$ C_6 – постоянные, которые возникают при интегрировании. Хорошо видно, что и *траектория тела и закон движения существенно зависят от начальных условий,* которые определяют 6 констант C_i, ($i = 1, 2, \ldots, 6$)

Пример



При t = 0 получаем

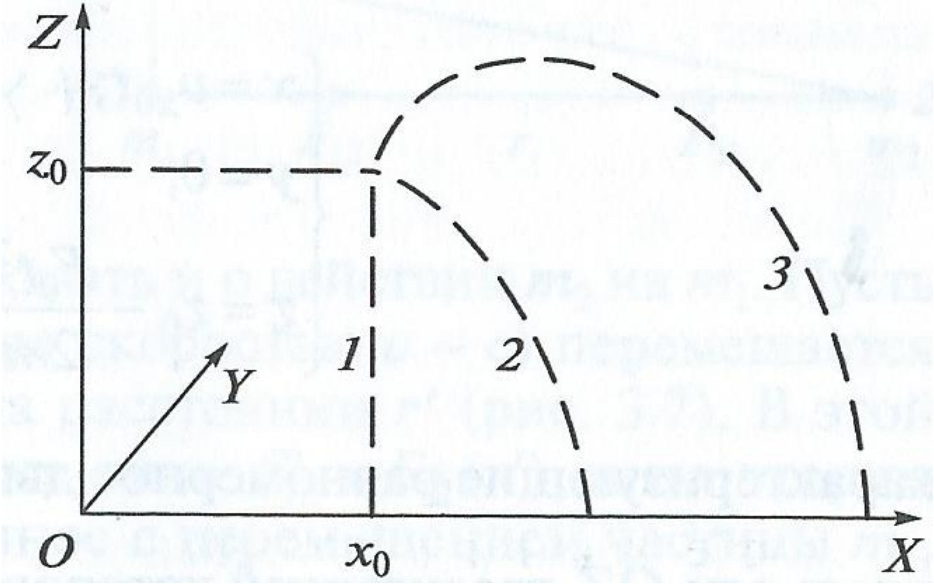
$$\begin{cases} x = x_0 = C_4 \\ y = y_0 = C_5 \\ z = z_0 = C_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} = C_1 \\ v_y = v_{y0} = C_2 \\ v_z = v_{z0} = C_3 \end{cases}$$

С учетом начальных условий имеем

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t, \\ y = y_0 + v_{y0}t, \\ z = z_0 + v_{z0}t - \dfrac{F_0 t^2}{2m}. \end{cases}$$

Зависимость вида траектории от начальных условий показана на рис.

Пример



Пусть движение происходит в плоскости *xz* с начальной скоростью, равной нулю, и при t =0

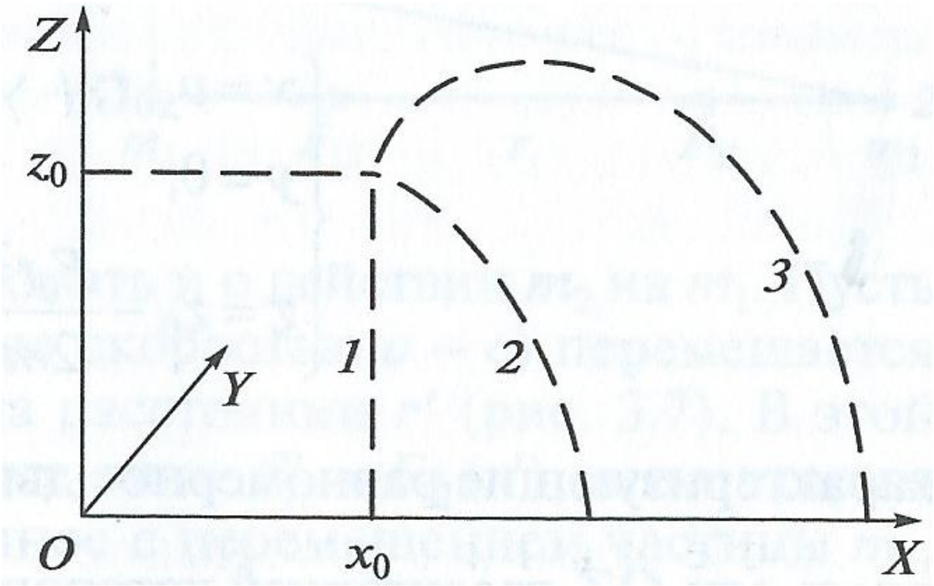
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Тогда решение получаем в виде

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z = z_0 - \dfrac{F_0 t^2}{2m}. \end{cases}$$

Это уравнения движения тела вертикально вниз вдоль оси Z от точки с координатой $z = z_0$ с ускорением $a_z = -\dfrac{F_0}{m}$ (прямая 1 на рис.)

Пример



Если движение происходит с ненулевой начальной скоростью, направленной, например, вдоль оси X, то есть

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

то уравнения движения принимают следующий вид:

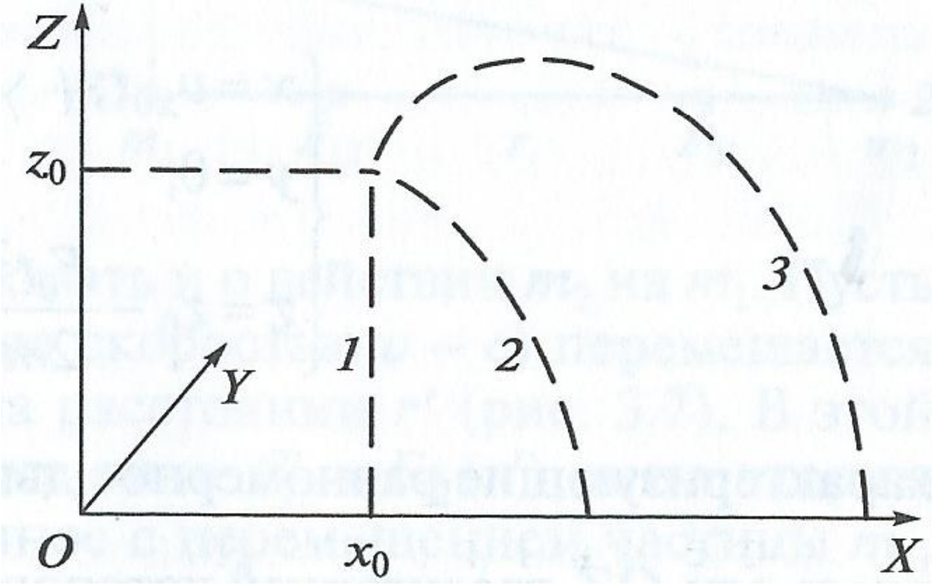
$$\begin{cases} x = v_{x0}t + x_0, \\ y = 0, \\ z = z_0 - \dfrac{F_0 t^2}{2m} = z_0 - \dfrac{a_z t^2}{2}. \end{cases}$$

Это равномерное движение вдоль оси x и ускоренное вдоль оси z, траекторией которого является парабола

$$z = z_0 - \frac{a_z}{2v_{0x}^2}x^2$$

(кривая 2 на рис.)

Пример



На рис. кривая 3 показывает траекторию движения для случая, когда

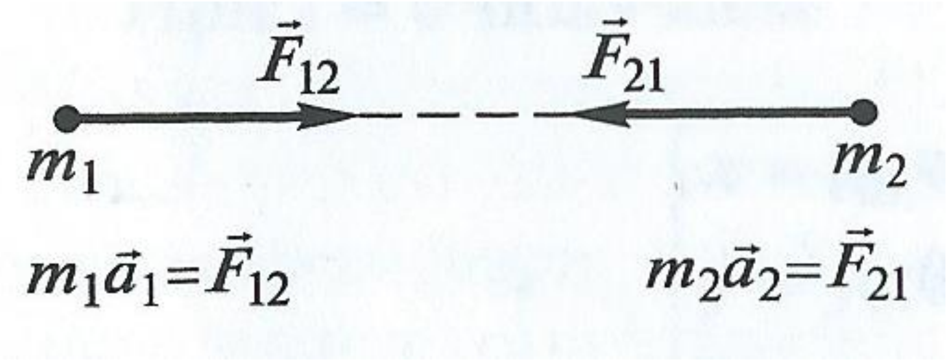
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = 0 \\ v_z = v_{z0} \end{cases}$$

Таким образом, второй закон Ньютона полностью определяет закон движения тела в зависимости от приложенных к телу сил. Но любая сила есть результат действия одного материального тела на другое, то есть результат **взаимодействия** тел.

Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона *гласит, что при любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое* (рис.)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Таким образом, источник силы и объект взаимодействия оказываются полностью эквивалентными: силы всегда возникают попарно и приложены к различным телам.

Принцип относительности в механике

Как было показано, при переходе от одной инерциальной системы координат к другой ускорение тела не изменяется (преобразования Галилея), поэтому уравнения Ньютона будут иметь совершенно одинаковую форму во всех инерциальных системах координат; если $\vec{r}$ - радиус – вектор точки в инерциальной системе координат X, Y, Z, а $\vec{r}'$ - в системе координат X', Y', Z', то

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

Пусть материальная точка M в момент времени $t = 0$ двигается в инерциальной системе X, Y, Z со скоростью v_0, направленной вдоль оси x, и на нее действует сила $\vec{F}$ $(0, 0, -F_0)$ – тогда движение точки в этой системе координат будет происходить по параболе.

Принцип относительности в механике

Пусть другая инерциальная система X', Y', Z' двигается относительно первой со скоростью $\vec{v}_0$ (v_0, 0, 0). Какую траекторию движения точки увидит наблюдатель, находящийся в системе X′, Y′, Z′? Для него **начальное условие будет другим**: при t =0 v_{x0}' = 0. Следовательно, точка будет двигаться по прямой вниз. Итак, разные наблюдатели в разных инерциальных системах координат будут описывать движение точки одними и теми же уравнениями, но с различными начальными условиями, поэтому получат разные траектории – один параболу, другой – прямую.

Вопрос: **а как шарик падает на самом деле?**

Принцип относительности в механике

Этот вопрос не имеет физического смысла, так как самой своей постановкой подразумевает наличие какой-то особой, выделенной инерциальной системы координат. *На самом деле все инерциальные системы абсолютно равноправны с точки зрения законов механики*. Правы оба наблюдателя – и тот, который считает траекторию параболой и тот, который видит прямую линию.

Более того:

Находясь в той или иной инерциальной системе координат *наблюдатель не имеет возможности с помощью каких бы то ни было экспериментов выяснить состояние движения своей инерциальной системы,* ее скорость относительно других инерциальных систем координат.

Это утверждение составляет в механике то, что называют **принципом относительности.**

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,
С. 23-32.

Тема следующей лекции:

Основные взаимодействия тел в природе. Гравитационные силы. Сила тяжести и вес тела. Невесомость. Движение спутников и планет.