Тема лекции:
Механическая работа и энергия. Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия

В любой физической системе существует определенная скалярная комбинация скоростей и координат частей системы, которую можно назвать **полной механической энергией системы,** и которая является наиболее универсальной характеристикой происходящих в системе движений.

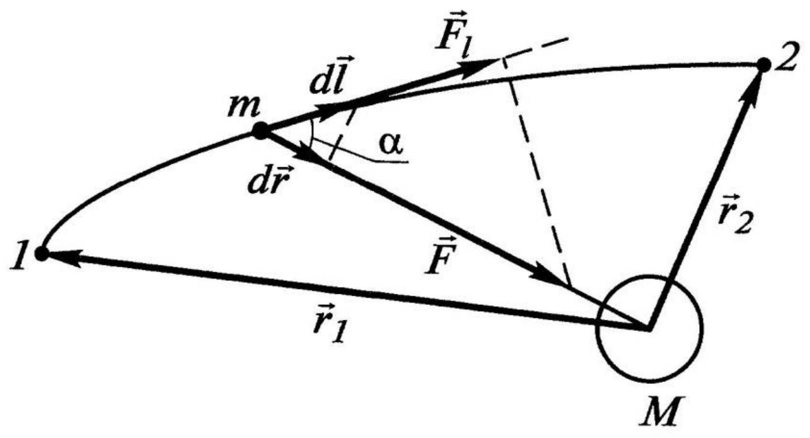
Эта величина – полная механическая энергия – в замкнутой системе сохраняется. Сохраняется, как мы знаем, и импульс. Но импульс – векторная величина, являющаяся характеристикой только механической формы движения.

Энергия

Величина, с которой мы сейчас начинаем работать, является *универсальной в том смысле, что она присуща всем без исключения формам движения материи, сопровождающим не только механические, но и тепловые, химические, электрические и все иные мыслимые процессы, происходящие в природе* – надо только знать, как выражается энергия для этих процессов.

Закон сохранения энергии *также носит универсальный характер – в замкнутой системе сохраняется сумма всех типов энергии, присущих различным формам движения.*

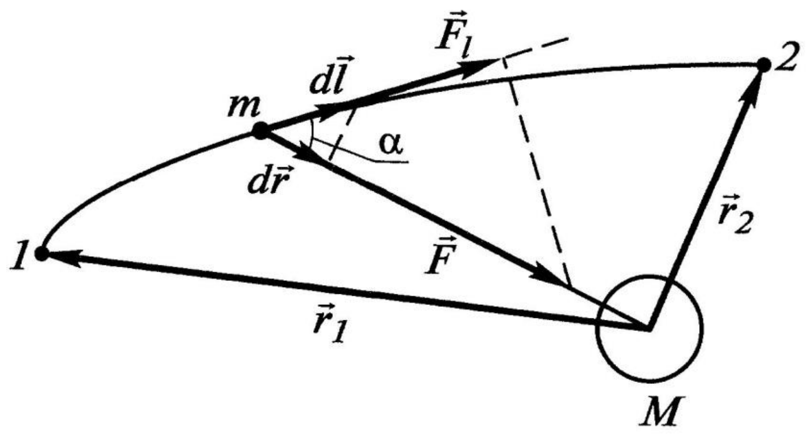
Механическая работа (работа силы)



Чтобы понять, как энергия определяется *в механике*, необходимо ввести понятие **работа силы**, неразрывно связанное с энергией и взаимопревращениями различных видов энергии.

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы по некоторой траектории. Это может быть, к примеру, движение спутника вокруг Земли под действием силы притяжения $\vec{F}$ по эллиптической орбите, на некотором участке траектории 1 – 2 (см. рис.) В общем случае в процессе движения сила может изменяться *как по величине, так и по направлению*.

Механическая работа (работа силы)



Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{l}$ в пределах которого силу можно считать постоянной. *Действие силы при перемещении тела на* $d\vec{l}$ *можно характеризовать величиной, равной скалярному произведению*

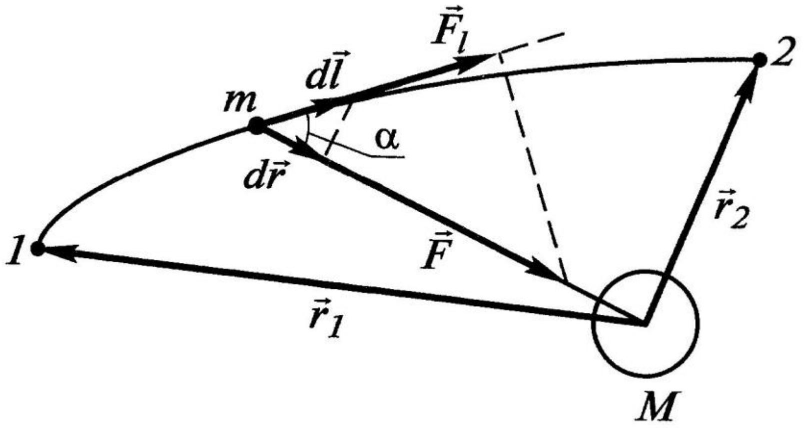
$$dA = \vec{F} d\vec{l}$$

которую называют элементарной работой силы $\vec{F}$ *на перемещении* $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos\alpha = F_l dl = F dr$$

Механическая работа (работа силы)

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = F_l dl = Fdr$$

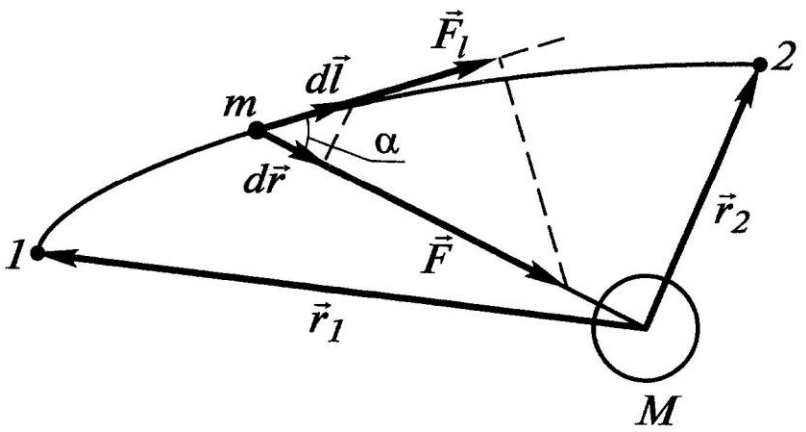


Здесь α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{l}$: F_l – величина проекции силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{l}$ dr – величина проекции $d\vec{l}$ на $\vec{F}$.

$$dA = \vec{F}d\vec{l}$$

Механическая работа (работа силы)

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = F_l dl = Fdr$$



dA – алгебраическая скалярная величина; в зависимости от величины α она может быть положительной и отрицательной и равна нулю при $\alpha = \pi/2$. Суммируя (интегрируя) по всем элементарным участкам траектории, имеем работу силы .

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 F_l dl = \int_1^2 Fdr$$

Работа силы всемирного тяготения

Сила всемирного тяготения определяется как

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Элементарная работа при перемещении на $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}d\vec{l} = -G\frac{mM}{r^3}r\underbrace{dl\cos\alpha}_{dr} = -G\frac{mM}{r^2}dr$$

Тогда полная совершаемая при этом перемещении работа

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{mM}{r^2}\right)dr = -GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

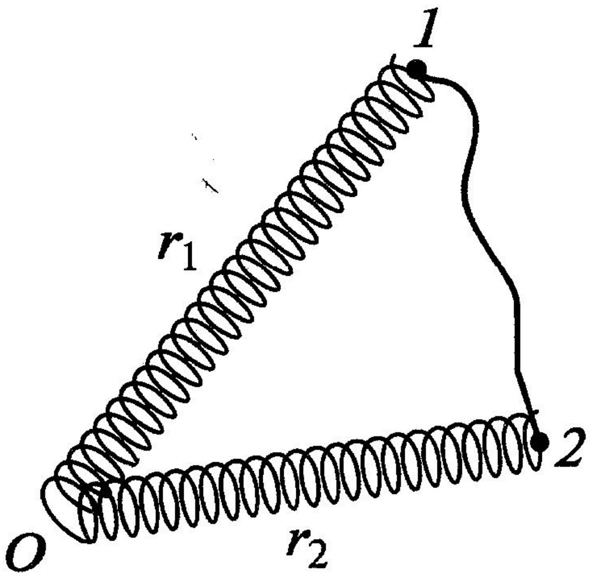
Работа силы всемирного тяготения

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \left(-G\frac{mM}{r^2} \right) dr = -GmM\left(-\frac{1}{r} \right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Величина работы в данном случае зависит только от начального и конечного положения точки приложения силы.

Силы, для которых совершенная работа не зависит от формы траектории и связана только с начальным и конечным положением точки приложения силы, называются ***потенциальными****.*

Работа силы упругости

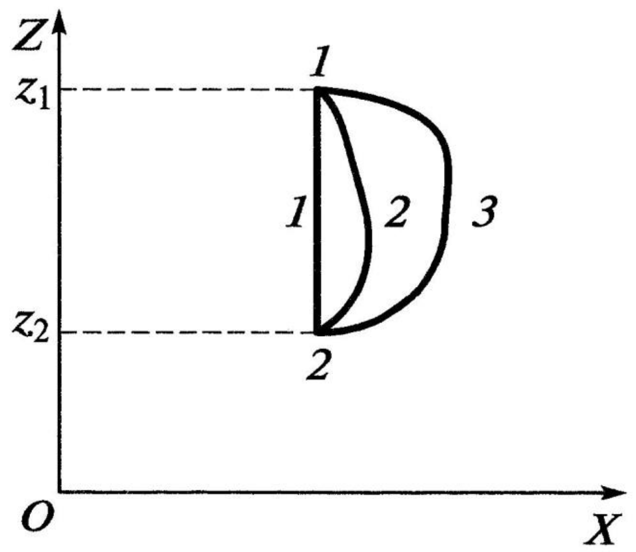


Пусть в точке *O* закреплена пружина (рис.). В положении 1 пружина растянута на Δr_1 и имеет длину r_1. Затем конец пружины попадает в точку 2, где она растянута на Δr_2 и имеет длину r_2. Очевидно, что совершенная при этом перемещении работа упругих сил

$$A_{12} = -\int_{\Delta r_1}^{\Delta r_2} k\Delta r d\left(\Delta r\right) = \frac{k}{2}(\Delta r_1^2 - \Delta r_2^2)$$

где k – коэффициент упругости пружины ($F_{упр}=-k\Delta r$); величина A_{12} не зависит от формы траектории 1→2, и *упругие силы, следовательно, также являются* ***потенциальными***.

Работа силы тяжести



Потенциальной является и сила тяжести. Пусть тело перемещается из точки 1 в точку 2 по различным траекториям (рис.), и при этом на него вдоль оси Z действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$.

Легко показать, что во всех случаях $A_{12} = mg(z_2 - z_1)$ и не зависит от формы траектории.

Потенциальные и непотенциальные силы

Итак, **потенциальными** являются силы:

- гравитационные,
- упругие,
- силы тяжести,

а также электрические силы (это будет показано в следующих частях курса).

Непотенциальными являются силы трения. Сила трения всегда направлена против направления перемещения тела, и величина совершаемой ею работы зависит от длины пройденного телом пути.

Кинетическая энергия

При перемещении точки, находящейся под действием силы $\vec{F}$ на величину $d\vec{l}$, совершается элементарная работа

$$dA = \vec{F} d\vec{l}$$

Уравнение движения имеет вид $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ умножим его на $d\vec{l}$:

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Поскольку $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ и $d\vec{l} = \vec{v}dt$, имеем $m\vec{v}d\vec{v} = dA$

или $\frac{1}{2} md\left(v^2\right) = dA$, то есть

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

Видно, что работа силы идет на приращение некоторой величины

$K = \frac{mv^2}{2}$ которую называют **кинетической энергией.**

Кинетическая энергия

Изменение кинетической энергии при конечном перемещении точки из положения 1 в положение 2 равно

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l}$$

откуда

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1 = A_{12}$$

Таким образом, изменение кинетической энергии частицы при конечном ее перемещении под действием силы равно работе этой силы на этом перемещении.

Кинетическая энергия

1. Если на частицу действуют несколько сил и их равнодействующая

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$$

то $A_{12} = A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)} + ...$, т.е. полная работа равна сумме работ, совершаемых каждой силой в отдельности.

2. Если система состоит из N взаимодействующих частиц, то ее полная кинетическая энергия складывается из кинетических энергий всех частиц:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия

Пока действуют силы, кинетическая энергия *K* изменяется. В замкнутой системе материальные точки, ускоряясь, изменяют свою скорость и, следовательно, меняется кинетическая энергия системы. А что же сохраняется?

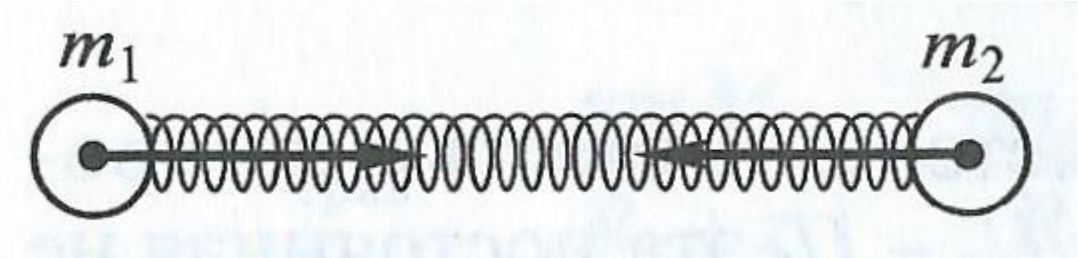
Введем новое понятие – **потенциальная энергия**.

Потенциальная энергия

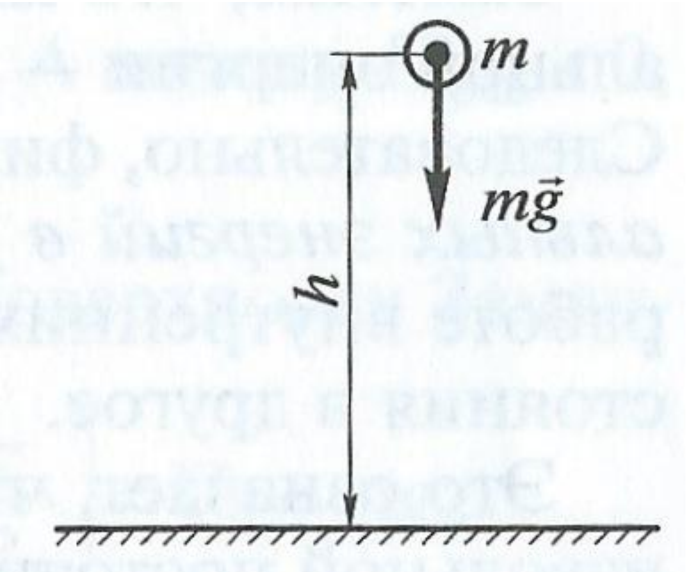
1. В замкнутой системе внутренние силы, действующие между частицами системы, зависят от их взаимного расположения, то есть от конфигурации системы.
2. Конфигурация системы определяет, какую работу могут совершить внутренние силы системы, если система предоставлена сама себе, то есть на нее не действуют внешние силы.

Потенциальная энергия

Пусть система представляет собой две массы, связанные растянутой пружиной (см. рис.).
В отсутствие внешних сил при изменении деформации пружины внутренние упругие силы совершают работу, величина которой зависит от конфигурации системы т.е. от того, каким образом изменяется расстояние между массами (длина пружины).



Потенциальная энергия



Тело падает на Землю, сила тяжести совершает работу, величина которой зависит от конфигурации системы, которая определяется высотой h тела над Землей (см. рис.). Когда тело падает на Землю, когда пружина сжимается до нормальных размеров (без удлинения или сжатия), запас потенциальной энергии системы иссякает, и она уже не может производить работу за счет внутренних сил.

Работа, которую может совершить система за счет внутренних сил и которая зависит только от взаимного расположения частей системы, называется ***потенциальной энергией системы***.

Потенциальная энергия

Ясно, что понятие потенциальной энергии может быть введено только для таких внутренних сил, которые являются потенциальными, иначе ее изменение при изменении конфигурации системы не может быть однозначным.
Обозначим потенциальную энергию буквой U.
Как можно определить величину U? *Фактически можно определить только ее изменение при изменении взаимного расположения частей системы, поскольку уменьшение потенциальной энергии замкнутой системы взаимодействующих материальных точек при изменении их взаимного расположения равно происходящей при этом работе внутренних потенциальных сил системы, взятой с обратным знаком.*

Потенциальная энергия

Если внутренние силы совершают положительную работу, потенциальная энергия уменьшается, то есть

$$dU = -dA^{\text{внутр.}}$$

Если под действием внутренних потенциальных сил система изменяет свою конфигурацию и переходит из состояния 1 в состояние 2, изменение ее потенциальной энергии получаем, определяя совершенную при этом работу:

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = -A_{12}^{\text{внутр.}}$$

Закон сохранения механической энергии

Ранее мы показали, что работа внутренних сил, взятая со знаком «+» определяет *изменение кинетической энергии;* эта же работа, взятая со знаком «–» определяет *изменение потенциальной энергии т.е.*

$$\Delta K = K_2 - K_1 = A_{12}^{\text{внутр.}}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -A_{12}^{\text{внутр.}}$$

Складывая эти уравнения, получаем для изменения полной механической энергии замкнутой системы, в которой действуют только потенциальные силы

$\Delta(U+K)=0$, это значит, что

$U+K=const.$

Следовательно, при движении частей замкнутой системы, где действуют только внутренние потенциальные силы, сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняется.

Закон сохранения механической энергии

Важно: Работа внутренних сил есть мера превращения одного вида энергии в другой.

Это утверждение носит *универсальный характер*. В рассматриваемом случае – это превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Заметим, что мы можем определить только *изменение* потенциальной энергии – через совершенную внутренними силами работу. Следовательно, физический смысл имеет только *разность потенциальных энергий в разных конфигурациях системы*. Эта разность определяется работой внутренних потенциальных сил при переходе из одного состояния в другое.

Закон сохранения механической энергии

Это означает, что величина U определяется с точностью до произвольной постоянной, так как определяется разность $U_2 – U_1$, куда эта постоянная не входит. Мы можем полагать для силы тяжести $U_{тяж} = mgz + C$, $C = const$, тогда при перемещении точки из положения z_1 в положение z_2 $\Delta U_{тяж} = U_2 – U_1 = mg(z_2 – z_1)$.

Аналогично, для силы упругости

$$U_{упр} = \frac{k\Delta r^2}{2} + C$$

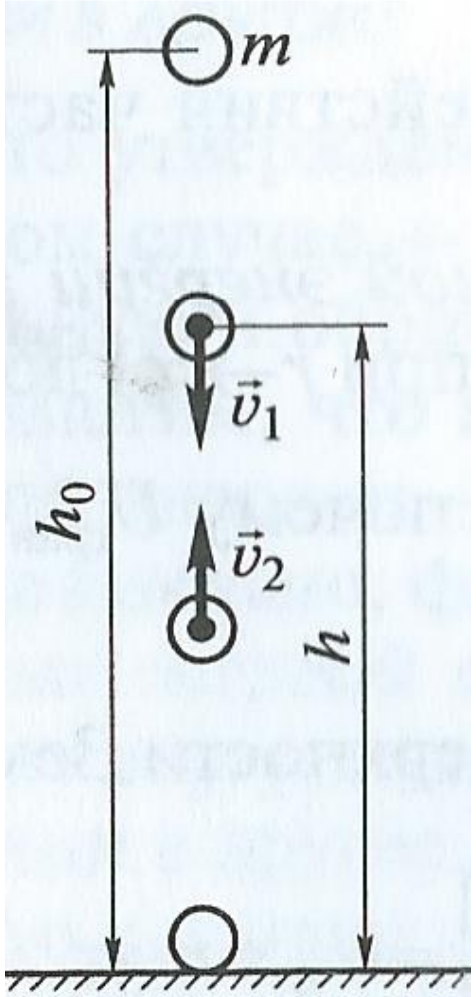
$$\Delta U_{упр} = U_2 - U_1 = \frac{k\Delta r_2^2}{2} - \frac{k\Delta r_1^2}{2}$$

Закон сохранения механической энергии

Если принять, что при z=0 в первом случае и при $\Delta r = 0$ во втором потенциальная энергия равна нулю, то C=0, и величины $U_{тяж}=mgz$ и

$U_{упр} = \dfrac{k\Delta r^2}{2}$ можно условно считать потенциальными энергиями, соответственно, силы тяжести и силы упругости в любой заданной конфигурации системы.

Пример

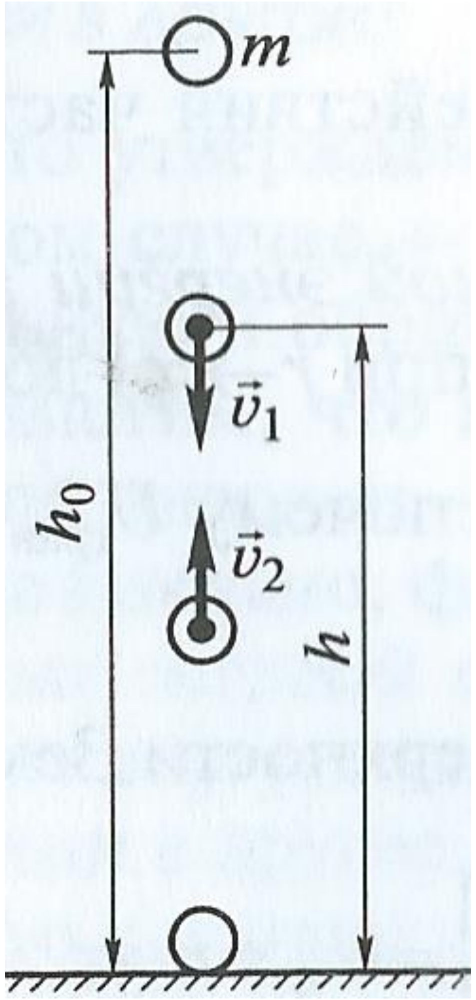


Взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий можно продемонстрировать на следующем примере: рассмотрим стальной шарик массы m, падающий на гладкое стекло (рис.).

Исходное состояние: шарик покоится на высоте h_0 над стеклом. Тогда $U=mgh_0$, $K=0$, суммарная энергия $W=U+K=mgh_0$.

Шарик падает, его потенциальная энергия уменьшается, на высоте h $U=mgh$, $K=\dfrac{mv_1^2}{2}=mg(h_0-h)$ полная энергия $W=U+K=mgh_0=const$.

Пример



Шарик приходит в соприкосновение со стеклом, начинает упруго деформироваться, стекло прогибается тоже. В какой-то момент деформация максимальна, потенциальная энергия упругой деформации опять равна mgh_0.

При восстановлении формы за счет упругих сил шарик получает кинетическую энергию, теряя потенциальную, и начинает движение вверх, поднимаясь до высоты h_0.

В верхней точке K=0, U=mgh_0, движение прекращается; во все время движения шарика его полная механическая энергия остается неизменной.

Связь внутренних сил с потенциальной энергией

Покажем, что, зная зависимость потенциальной энергии от положения частей системы, можно определить действующие в системе внутренние силы. Действительно, элементарная работа при перемещении точки приложения силы

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

при этом изменение потенциальной энергии

$$dU = -dA = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

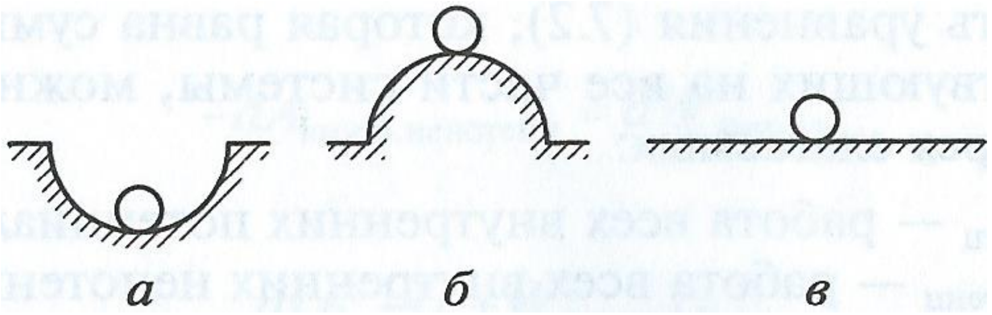
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

Виды равновесия

Из этого следует, что когда тело находится в покое, в равновесии и действующие на него силы равны нулю, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ его потенциальная энергия имеет экстремум (см. рис.)

В первом случае (потенциальная яма) – минимум – соответствует устойчивому равновесию (рис. *а*), во втором (потенциальный барьер) – максимум – неустойчивому равновесию (рис. *б*). Ситуация на рис. *в* соответствует так называемому безразличному равновесию.



Закон изменения механической энергии

Мы установили, что для замкнутой системы взаимодействующих материальных точек, в которой действуют *только потенциальные силы*, величина $W=K+U$ – сумма ее кинетической и потенциальной энергий - постоянна.

Но если на части системы действуют *внешние силы,* (то есть система незамкнута) или же в системе действуют **непотенциальные силы**, ситуация изменяется. Суммарная механическая энергия системы уже не остается постоянной величиной.

Закон изменения механической энергии

Будем рассуждать так: пусть система состоит из N взаимодействующих частей. Для произвольной i-той части системы мы можем записать:

$dK_i = dA_i$,

где dK_i – изменение ее кинетической энергии за время dt, dA_i – элементарная работа, совершенная за время dt *всеми действующими на эту часть системы силами* – потенциальными, непотенциальными, внешними.

Закон изменения механической энергии

Сложив уравнения для всех частей системы, получим:

$$\sum_{i=1}^{N} dK_i = \sum_{i=1}^{N} dA_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} dK_i = d\sum_{i=1}^{N} K_i = d\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = dK$$

Это - изменение кинетической энергии всей системы.

Правую часть уравнения, которая равна суммарной работе всех сил, действующих на все части системы, можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$dA_{\text{внутр. потенц.}}$ – работа всех внутренних потенциальных сил,

$dA_{\text{внутр. непотенц.}}$ – работа всех внутренних непотенциальных сил,

$dA_{\text{внешн.}}$ – работа всех внешних сил.

Таким образом,

$dK = dA_{\text{внутр. потенц.}} + dA_{\text{внутр. непотенц.}} + dA_{\text{внешн.}}$.

Закон изменения механической энергии

Но суммарная работа всех внутренних потенциальных сил есть изменение потенциальной энергии, взятое с обратным знаком, то есть $dA_{\text{внутр. потенц.}} = -dU$, следовательно

$$d(K+U) = dA_{\text{внутр}} + dA_{\text{внеш}}$$

Это выражение представляет собой закон изменения механической энергии системы:

Изменение полной механической энергии системы за некоторый промежуток времени равно суммарной работе всех внутренних непотенциальных и всех внешних сил за этот промежуток времени.

Закон изменения механической энергии

Если внешних сил нет (система замкнута), а есть только внутренние непотенциальные – силы трения, то происходит следующее.
Работа сил трения всегда отрицательна: $\vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} < 0$.
Следовательно, в этом случае

$$d\left(K+U\right)=dA_{\substack{\text{внутр.}\\ \text{непотенц.}}}<0$$

Полная механическая энергия будет уменьшаться. Но *полная* энергия системы сохраняется – должна сохраняться!
Здесь важно иметь в виду следующее. Когда сила совершает работу, происходит превращение одного вида энергии в другой. Работа внутренних потенциальных сил определяет взаимное превращение кинетической и потенциальной энергий. Работа внутренних непотенциальных сил – это превращение механической энергии в другую форму – форму **внутренней или тепловой энергии**. Тепловая энергия $W_{\text{внутр}}$ – это кинетическая и потенциальная энергия молекул, составляющих вещество.

Закон изменения механической энергии

Таким образом, для замкнутой системы, в которой имеются силы трения

$d\left(K+U\right)=dA_{\substack{\text{внутр.}\\\text{непотенц.}}}$, но $-dA_{\substack{\text{внутр.}\\\text{непотенц.}}}=dW_{\text{внутр.}}$

следовательно,

$$d\left(K+U+W_{\text{внутр.}}\right)=0$$

$$K+U+W_{\text{внутр.}}=const$$

Это обобщенный закон сохранения энергии, учитывающий три вида энергии: кинетическую, потенциальную и внутреннюю.

Если система незамкнута, ее механическая энергия может изменяться – увеличиваться или уменьшаться, в зависимости от знака величины $dA_{\text{внешн.}}$.

В этом случае увеличение или уменьшение механической энергии системы происходит одновременно с увеличением (уменьшением) механической энергии вне рассматриваемой системы.

Вторая космическая скорость

Если тело получает у поверхности Земли скорость $\vec{v}$ направленную вертикально вверх, то оно, если начальная скорость не очень велика, вернется обратно на поверхность Земли. Однако если скорость окажется достаточно большой, то тело будет продолжать двигаться от Земли и выйдет за пределы земного тяготения. Минимальная начальная скорость, необходимая для того, чтобы тело никогда не вернулось на Землю, (то есть вышло из сферы земного тяготения) называется **второй космической скоростью.**

Вторая космическая скорость

Мы помним выражение для первой космической скорости $v_I = \sqrt{R_З g} \approx$ 8 км/с – это скорость, достаточная для вывода тела на круговую орбиту у поверхности Земли.

Пусть тело m_1 стартует с начальной скоростью v_1. При этом его полная механическая энергия

$$K + U = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{G m_1 M}{R_З}$$

Вторая космическая скорость

Тело поднимается на расстояние r от центра Земли, останавливается и начинает падать обратно. В момент остановки скорость тела равна нулю, и в соответствии с законом сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{G m_1 M}{R_З} = -\frac{G m_1 M}{r}$$

Если тело не возвращается, то есть улетает за пределы земного тяготения, то $r \to \infty$. Это возможно, если

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{G m_1 M}{R_З} = 0$$

Откуда $v_{II} = \sqrt{2gR_З} = \sqrt{2} v_I$ =11,2 км/с.

Это **вторая космическая скорость** – она в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости.

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,

С. 57-68.

Видеоматериалы по теме лекции смотрите на сайте swcusp.ukit.me в разделе «видеоматериалы»:

«Механическая работа», «Кинетическая энергия», «Потенциальная энергия»

Тема следующей лекции: Динамика вращательного движени. Закон сохранения момента импульса