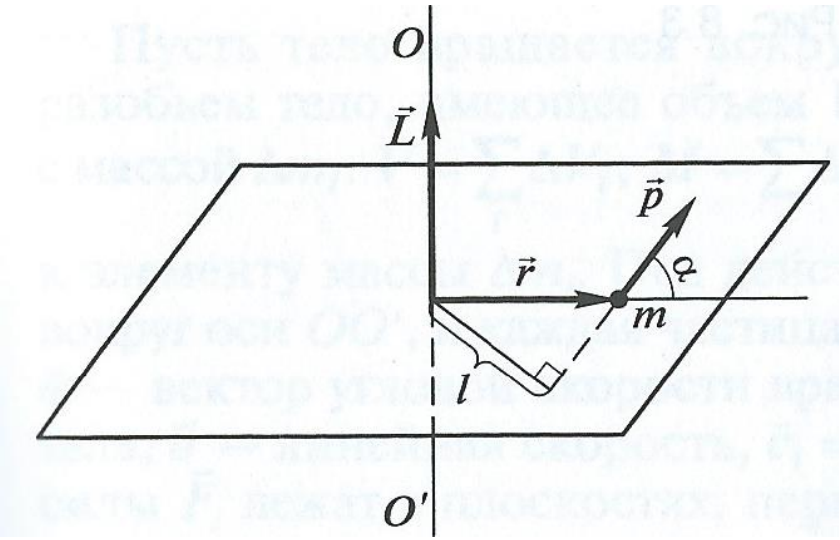
Тема лекции:
Динамика вращательного движения. Закон сохранения момента импульса

Вращательное движение

Мы переходим к анализу динамики вращательного движения. Вращательное движение – один из наиболее распространенных видов движения в природе – планеты, искусственные спутники, электроны в классической модели атомов, вращение Земли вокруг своей оси и планет вокруг Солнца – все эти типы движения поражают своим постоянством, поэтому возникает естественный вопрос – как описать вращательное движение в рамках классической механики?

Момент импульса

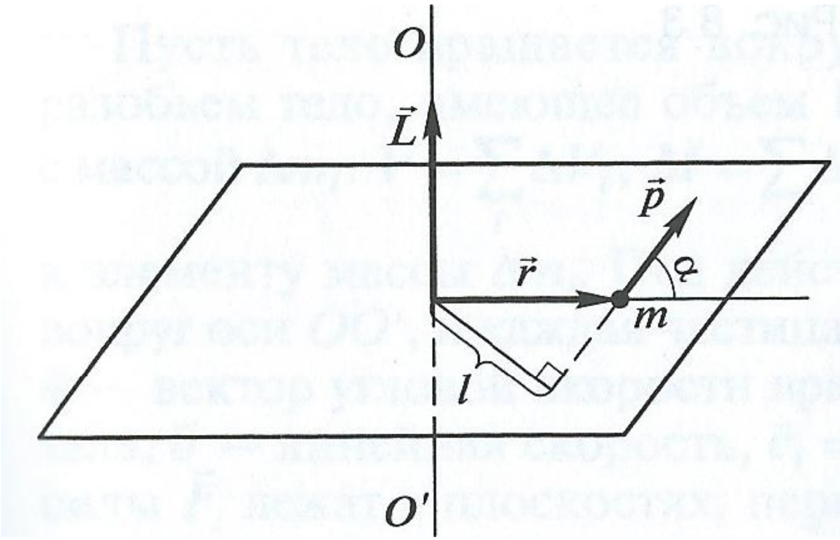


Для анализа поведения таких систем необходимо знание еще одного закона – закона сохранения и изменения **момента импульса**. Что это за величина и каковы ее свойства?

Сначала рассмотрим одну частицу в точке, положение которой относительно некоторой оси OO' определяется вектором $\vec{r}$ (рис.)

$\vec{p} = m\vec{v}$ - ее импульс в системе отсчета с центром в точке O. Вектор $\vec{v}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси OO'.

Момент импульса



Моментом импульса частицы с массой m и импульсом $\vec{p}$ называют вектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]$$

Таким образом, вектор $\vec{L}$ направлен вдоль оси OO' перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{p}$ по правилу правого винта, а его величина $L = rp\sin\alpha = lp$, где $l = r\sin\alpha$, α - угол между вектором импульса $\vec{p}$ и радиус-вектором $\vec{r}$.

Изменение момента импульса во времени

Теперь выясним, *какая механическая величина определяет изменение вектора* $\vec{L}$. Для этого продифференцируем уравнение $\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]$ по t:

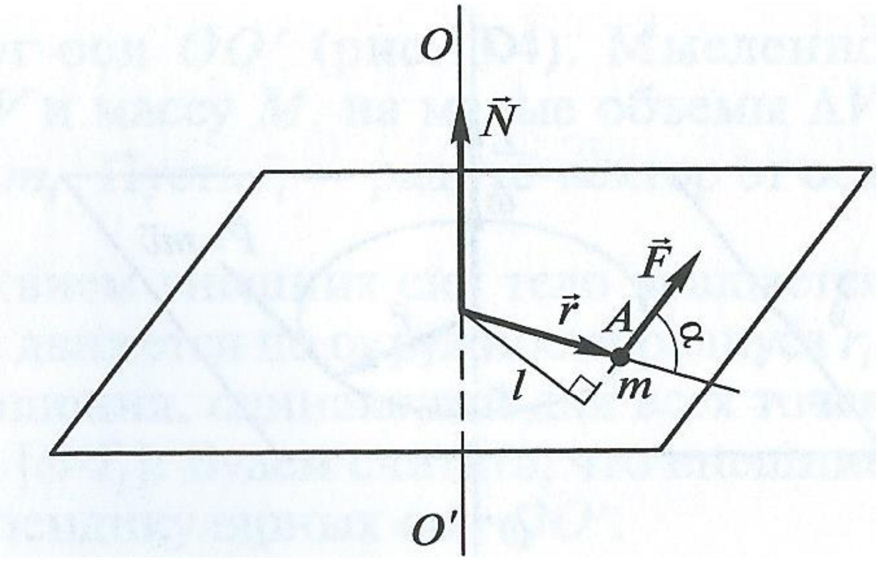
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

Первое слагаемое равно нулю, поскольку $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и $\left[\vec{v} \cdot m\vec{v}\right] = 0$, во второй скобке $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ по второму закону Ньютона, где $\vec{F}$ - сила, приложенная к массе m, то есть

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]$$

Момент силы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F} \right]$$



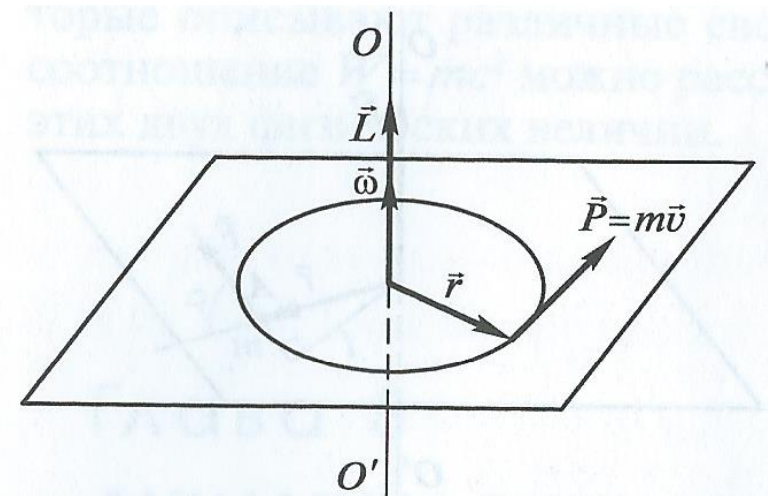
Величину $\left[\vec{r} \cdot \vec{F} \right] = \vec{N}$ называют **моментом силы** $\vec{F}$ относительно оси O'. Вектор $\vec{N}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{F}$ и $\vec{r}$, и его величина $N = Fr\sin\alpha = Fl$, l в этом случае называют *плечом вектора силы* $\vec{F}$ *относительно оси* OO' (рис.).

Итак, *производная по времени от момента импульса* $\vec{L}$ *массы m относительно оси* OO' *равна моменту действующей на m силы* $\vec{F}$ *относительно той же оси.*

Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

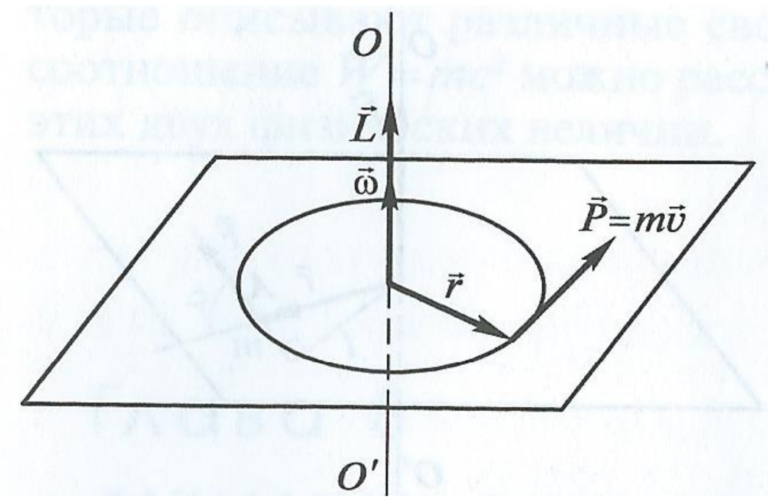
Уравнение $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ называется уравнением моментов для материальной точки A относительно оси OO'. Видно, что если $\vec{N} = 0$, то $\vec{L} = const$, то *есть если момент сил, действующих на материальную точку относительно оси* OO'*, равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой же оси будет постоянным во времени* (**закон сохранения момента импульса материальной точки**).

Момент импульса



Рассмотрим, чему равен момент импульса материальной точки, равномерно двигающейся против часовой стрелки по окружности вокруг оси OO' (рис.). Материальная точка имеет массу m, скорость $|\vec{v}| = const$, вектор $\vec{L}$ направлен вверх по оси OO' и $|L| = rp = mvr$. Но $v = r\omega$, где ω - угловая скорость точки, поэтому $L = mr^2\omega$. Применяя правило правого винта, мы видим, что вектор $\vec{\omega}$ направлен так же, как $\vec{L}$ ($\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$).

Момент инерции



Поэтому уравнение моментов можно записать в следующей векторной форме:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

где величина $I=mr^2$ называется **моментом инерции** *материальной точки относительно оси OO'* **.** Для системы из n материальных точек, связанных внутренними силами любой природы и вращающихся вокруг оси OO' на разных расстояниях от нее момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Уравнение моментов

Уравнение моментов принимает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]$$

Момент импульса и угловая скорость будут изменяться, только если на материальную точку действует момент внешних сил. Если этого нет, то $\vec{L} = I\vec{\omega} = const$ $\vec{\omega} = const$, то есть вектора $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ сохраняют свою величину и направление.

Уравнение моментов

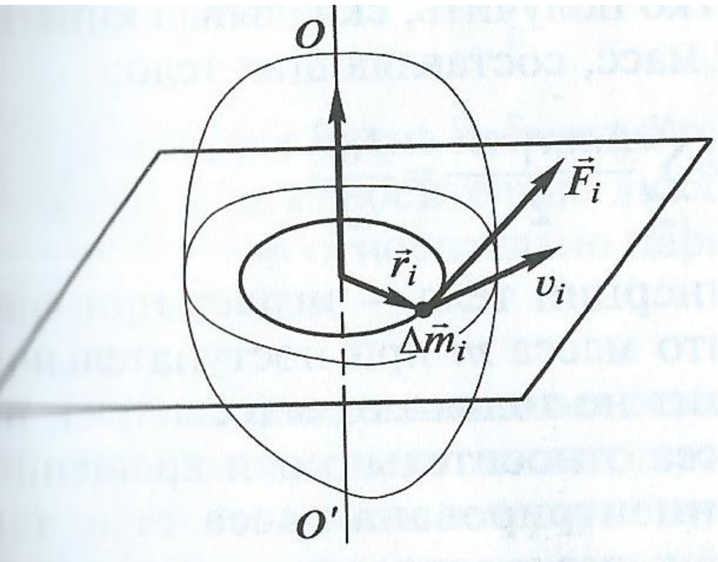
Именно это условие реализуется для вращения спутников вокруг Земли, Земли вокруг Солнца, электронов вокруг ядра. Однако для низколетящих спутников момент импульса постепенно уменьшается, поскольку при движении в земной атмосфере возникает сила трения, момент которой относительно оси вращения не равен нулю и увеличивается по мере приближения к поверхности Земли. Центростремительные силы не создают момента относительно оси вращения.

.

Момент инерции и уравнение моментов для массивного твердого тела

Теперь рассмотрим вращение *вокруг оси массивного объемного недеформируемого твердого тела*. Оказывается, что характер этого движения в значительной степени зависит от того, *как распределена масса тела относительно оси вращения*. Массивные тела будем представлять совокупностью очень большого числа очень малых масс, связанных очень жесткими пружинами, такими жесткими, что тело можно считать недеформируемым.

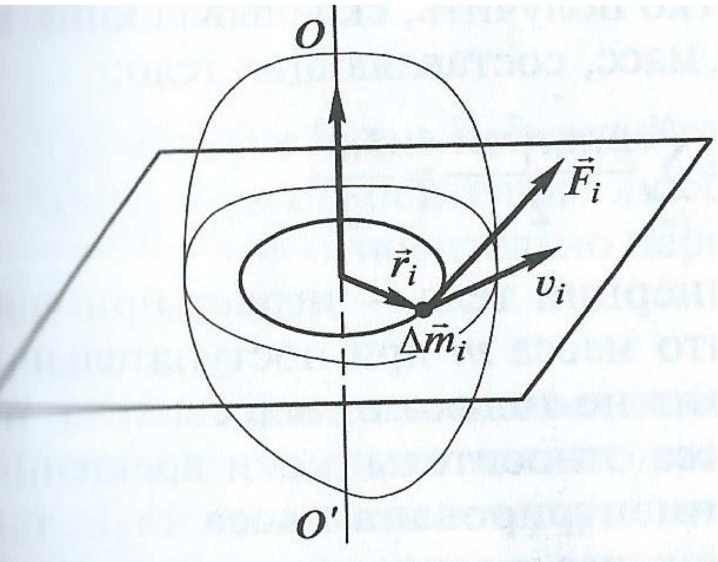
Уравнение моментов для массивного твердого тела



Пусть тело вращается вокруг оси OO' (рис). Мысленно разобьем тело, имеющее объем V и массу M на малые объемы ΔV_i с массой Δm_i:

$M = \sum_i \Delta m_i$ $V = \sum_i \Delta V_i$. Пусть $\vec{r}_i$ – радиус-вектор от оси к элементу массы Δm_i. Под действием внешних сил тело вращается вокруг оси OO', и каждая частица двигается по окружности радиуса r_i, $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения, одинаковый для всех точек тела, $\vec{v}$ – линейная скорость, $\vec{v}_i = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right]$. Будем считать, что внешние силы $\vec{F}_i$ лежат в плоскостях, перпендикулярных оси OO'.

Уравнение моментов для массивного твердого тела



Для каждой массы Δm_i в соответствии со вторым законом Ньютона

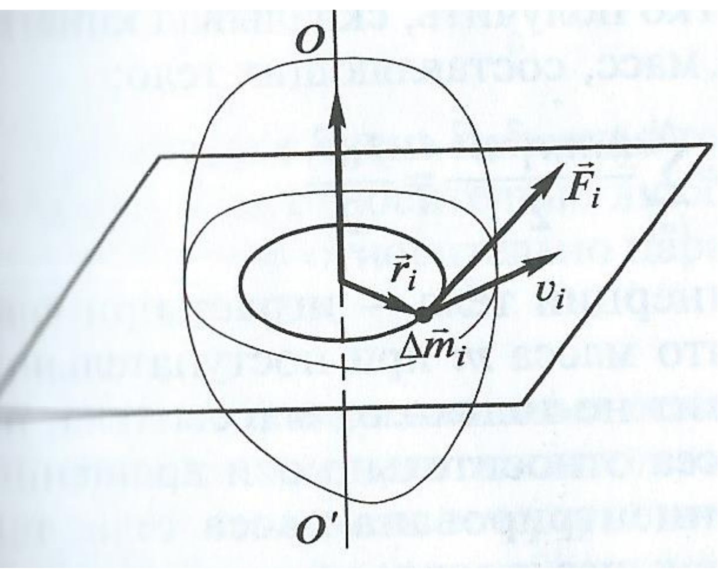
$$\Delta m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\Delta m_i \vec{v}_i\right) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ki} + \vec{F}_i$$

$\vec{F}_{ki}$- внутренние силы взаимодействия элементарных масс, $\vec{F}_i$ - внешние силы, $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$ Умножим векторно справа каждое уравнение на $\vec{r}_i$

$$\left[\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\Delta m_i \vec{v}_i\right)\right] = \left[\vec{r}_i \cdot \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ki}\right] + \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]$$

Слева имеем производную момента импульса элемента Δm_i, справа – моменты действующих на него сил:

Уравнение моментов для массивного твердого тела

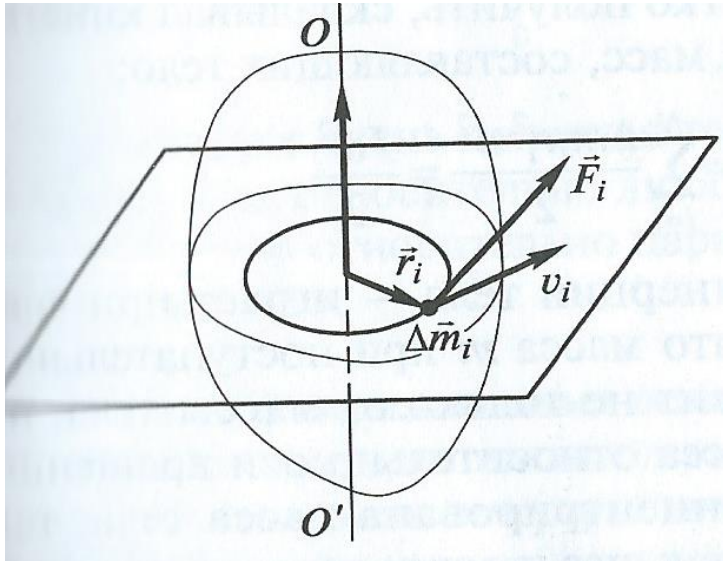


$$\frac{d}{dt}\left(\Delta\vec{L}_i\right) = \underbrace{\left[\vec{r}_i \cdot \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ki}\right]}_{\text{момент внутр. сил, действ. на } \Delta m_i} + \underbrace{\left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]}_{\text{момент внешн. сил, действ. на } \Delta m_i}$$

Такое уравнение справедливо для любого элемента массы Δm_i; пусть таких масс N. Сложим левые и правые части этих уравнений, имея в виду, что $\Delta\vec{L}_i = \left(\Delta m_i r_i^2\right)\vec{\omega}$, тогда

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega}\left(\sum_{i}^{N} \Delta m_i r_i^2\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]}_{\text{суммарный момент внешних сил}}$$

Момент инерции



$$\frac{d}{dt}\vec{\omega}\left(\sum_{i}^{N}\Delta m_i r_i^2\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]}_{\text{суммарный момент внешних сил}}$$

При сложении мы учли, что *сумма моментов всех внутренних сил равна нулю*.

Величина

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 = I$$

называется **моментом инерции** тела или системы материальных точек.

Момент инерции

Получаем для всего тела $\frac{d}{dt} I\vec{\omega} = \vec{N}$ $I\vec{\beta} = \vec{N}$

где $\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right]$ – полный момент внешних сил, действующих на тело, $\vec{\beta}$ – вектор углового ускорения.

При конкретных расчетах момента инерции различных тел удобно применять интегральную формулу

$$I = \int_m r^2 dm$$

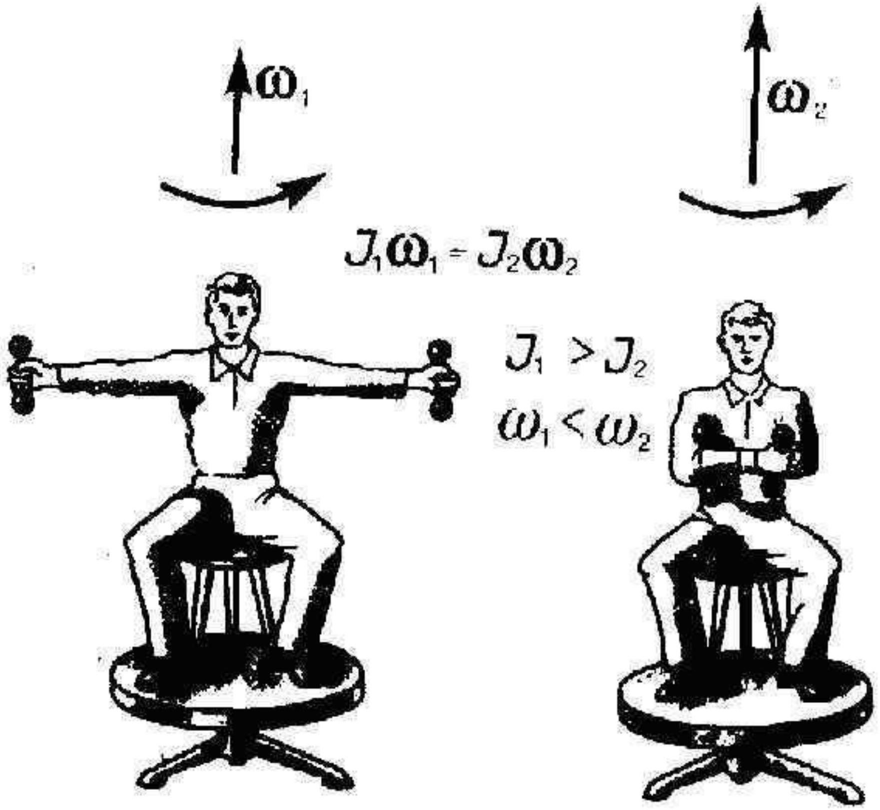
Закон сохранения момента импульса

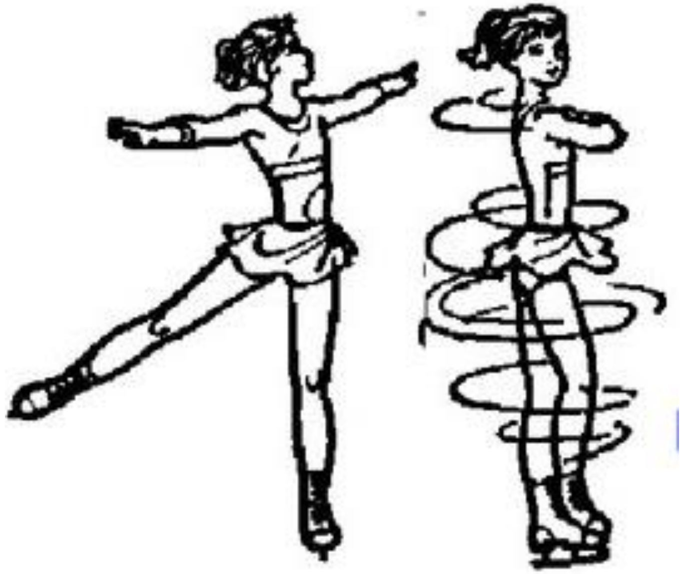
Если момент внешних сил, действующих на твердое тело относительно некоторой оси OO' равен нулю, величина и направление момента импульса тела относительно этой же оси сохраняется во времени.

Действительно, из уравнения $\frac{d}{dt} I\vec{\omega} = \vec{N}$ следует, что при $\vec{N} = 0$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const.$$

Закон сохранения момента импульса. Скамья Жуковского. Вращение фигуристки





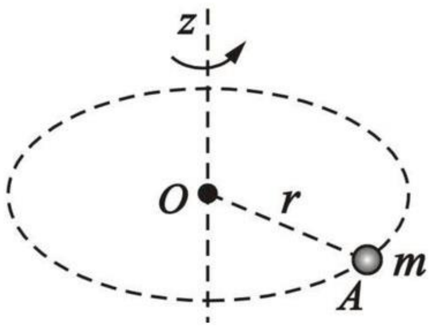
Кинетическая энергия вращательного движения

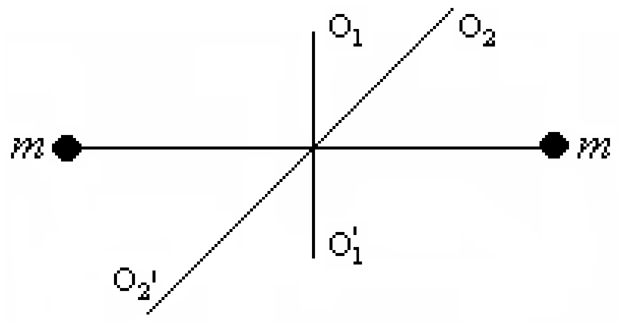
Кинетическую энергию вращательного движения тела, вращающегося вокруг некоторой фиксированной оси и имеющего угловую скорость $\vec{\omega}$ и момент инерции I, легко получить, складывая кинетические энергии всех элементарных масс, составляющих тело:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Подчеркнем, что I – момент инерции тела – играет при вращательном движении ту же роль, что масса m при поступательном движении. Момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как распределена эта масса относительно оси вращения. Чем дальше от оси вращения сконцентрирована масса тела, тем больше его момент инерции и тем меньшее угловое ускорение можно сообщить телу заданным моментом силы.

Момент инерции: материальная точка и две материальных точки

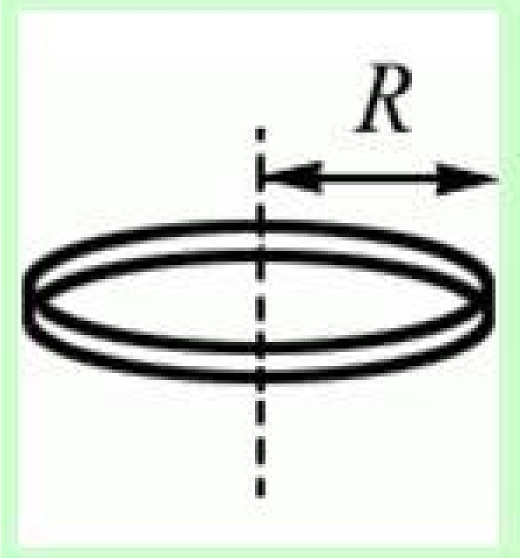




Для материальной точки, вращающейся по окружности радиуса r: $I=mr^2$.

Для гантели (две материальных точки с массами m, закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной $2r$, ось вращения проходит через центр масс): $I=2mr^2$.

Момент инерции: обруч



3. Для обруча радиуса r (тонкое кольцо) или полого тонкостенного цилиндра, ось проходит через центр кольца перпендикулярно его плоскости:

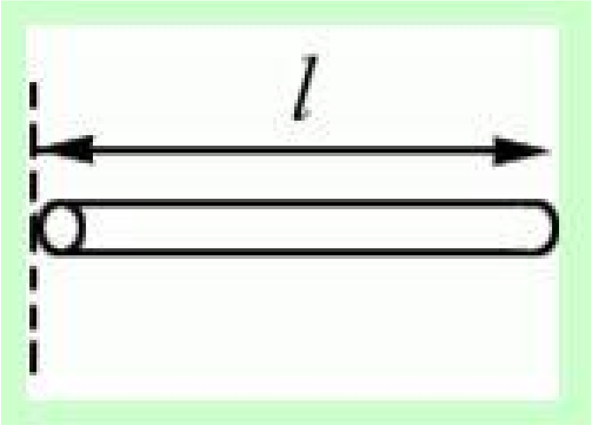
$$I = \int_m r^2 dm = r^2 \int_m dm = mr^2$$

4. Для обруча или толстостенного цилиндра с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 (ось вращения проходит по оси цилиндра): $I = m(r_1^2 + r_2^2)/2$.

Момент инерции: однородный стержень

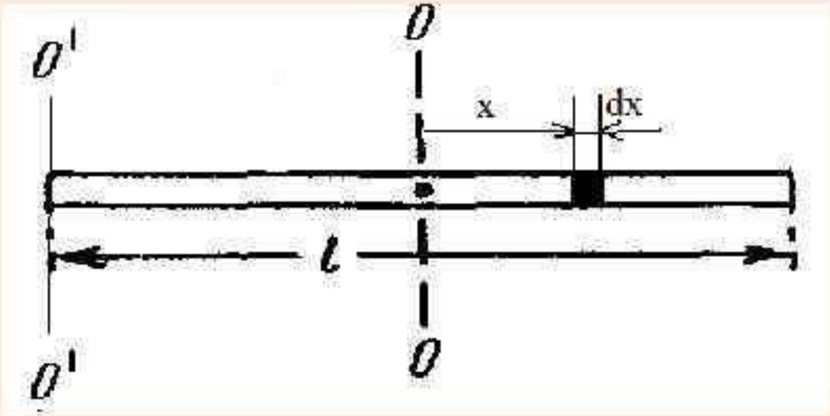
5. Для однородного цилиндрического стержня длины l и массы m, ось проходит через один из концов стержня перпендикулярно стержню: $dm=\rho S dr$,

$$I = \int_0^l r^2 \rho S dr = \rho S \int_0^l r^2 dr = \rho S \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^l = \frac{1}{3} m l^2$$



Момент инерции: однородный стержень

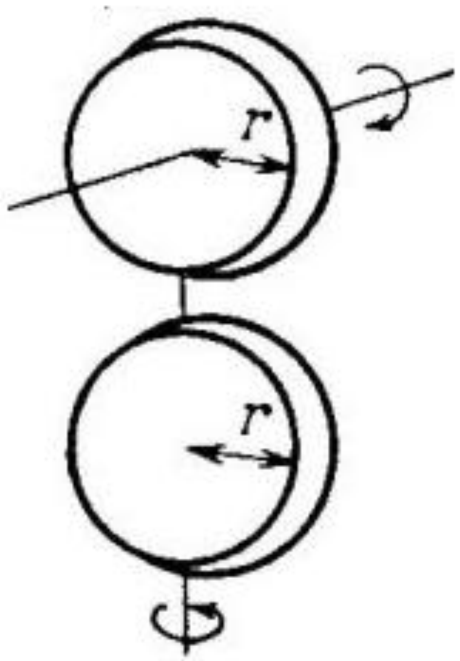
Момент инерции стержня



$$J_c = \int_m x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{m}{3l}\left[\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{1}{12ml^2}.$$

$$J' = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2.$$

Момент инерции: сплошной диск и цилиндр

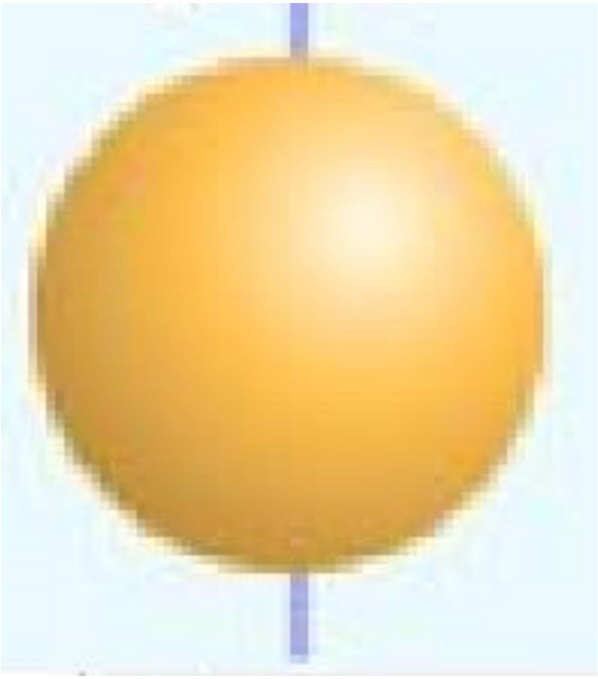


Для сплошного диска или цилиндра радиуса r, ось совпадает с осью симметрии: $I = mr^2/2$.

Для сплошного диска, ось вращения проходит через центр диска и лежит в плоскости диска: $I = mr^2/4$.

Момент инерции: шар

Для однородного сплошного шара радиуса r, ось вращения проходит через центр шара: $I=2mr^2/5$.

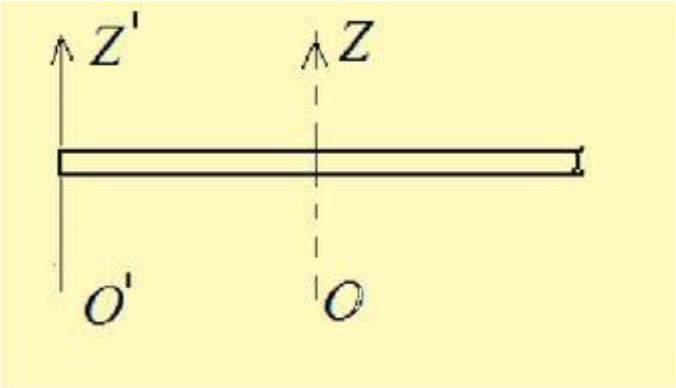


Момент инерции: стержень

Важно: во всех рассмотренных случаях, кроме стержня, момент инерции рассчитывался относительно оси, проходящей через центр масс твердого тела. Но в случае стержня можно определить момент инерции и относительно центра масс, который находится в середине стержня:

$$I = 2\rho S \int_0^{l/2} r^2 dr = \rho S l \frac{2l^2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{12} m l^2$$

Существует очень полезная теорема, позволяющая найти момент инерции тела относительно любой оси, если известен момент инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела.



Теорема о параллельных осях (Гюйгенса-Штейнера)

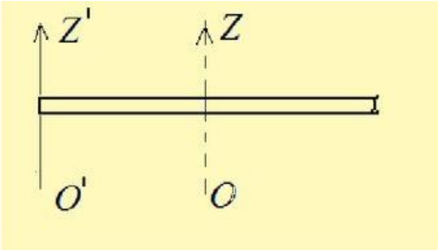
Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_O + md^2.$$

где I_O *– момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс,* I *– момент инерции тела относительно оси, параллельной оси, проходящей через центр масс,* d *– расстояние между осями,* m *– масса тела.*

Легко видеть, что этим соотношением связаны определенные выше моменты инерции стержня относительно осей, одна из которых проходит через центр масс, а другая – через конец стержня.

Таким образом, момент инерции любого тела зависит от того, *как расположена ось вращения относительно центра масс тела и как расположено само тело относительно оси.*



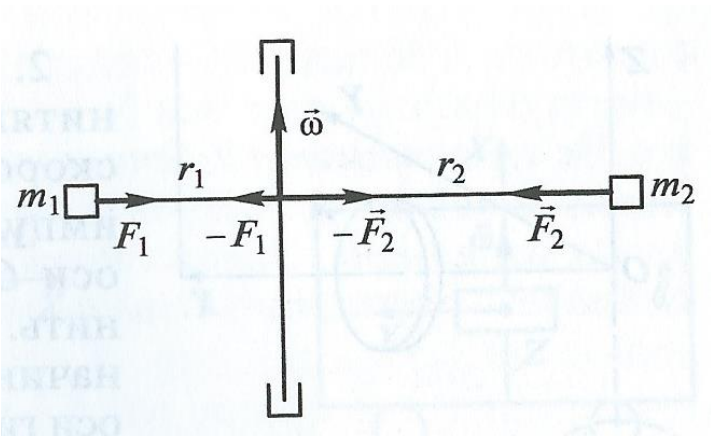
Свободные оси вращения

Во всех рассмотренных случаях тело могло вращаться относительно неподвижной оси. Это условие должно было обеспечиваться определенными внешними условиями – например, закреплением оси вращения в подшипниках.

Относительно любой оси тело будет иметь определенный момент инерции, и его вращение определяется уравнением моментов относительно этой оси

$$\frac{d}{dt} I\vec{\omega} = \vec{N}$$

Свободные оси вращения

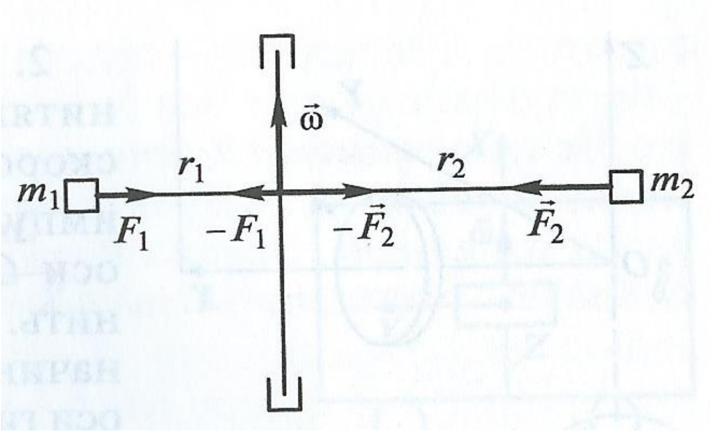


В общем случае при произвольном расположении оси вращения в отсутствие подшипников ось не останется неподвижной, начнет перемещаться в пространстве.

Однако в любом теле можно выбрать такую ось, которая будет оставаться неподвижной и вращение вокруг которой возможно без участия внешних сил, приложенных к оси.

Такие оси вращения называются **свободными.** В качестве примера рассмотрим вращение гантелеподобного тела, состоящего из двух масс, соединенных невесомым жестким стержнем, расположенным перпендикулярно оси вращения (рис.).

Свободные оси вращения

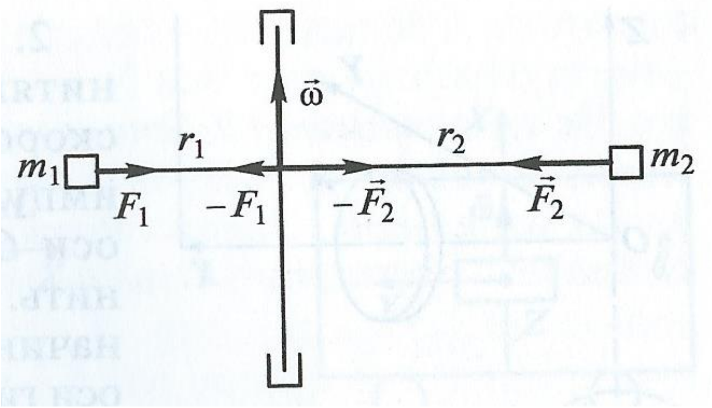


Вращение масс m_1 и m_2 происходит под действием центростремительных сил F_1 и F_2

$$\begin{cases} \left|\vec{F}_1\right| = \dfrac{m_1 v_1^2}{r_1} = m_1 r_1 \omega^2 \\ \left|\vec{F}_2\right| = \dfrac{m_2 v_2^2}{r_2} = m_2 r_2 \omega^2 \end{cases}$$

Если $\left|\vec{F}_1\right| \neq \left|\vec{F}_2\right|$, тело удерживается на оси только за счет того, что на ось со стороны подшипников действует сила, величина которой $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F}_2\right| - \left|\vec{F}_1\right|$ и которая уравновешивает силы, действующие на ось со стороны вращающихся масс.

Свободные оси вращения



Взаимодействие между осью и подшипниками исчезает, только если $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$

то есть $m_1 r_1 = m_2 r_2$,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Последнее условие определяет положение центра масс.

Свободные оси вращения

Для того чтобы ось вращения была свободной, необходимо выполнение двух условий:

1. Ось вращения должна проходить через центр масс тела.
2. Если тело симметричное – ось вращения должна совпадать с осью симметрии тела. Если тело несимметричное – ориентация тела относительно оси вращения должна соответствовать максимальной величине его момента инерции.

Если эти условия выполняются, мы можем просто убрать подшипники – и будем иметь вращение вокруг неподвижной свободной оси.

Свободные оси вращения

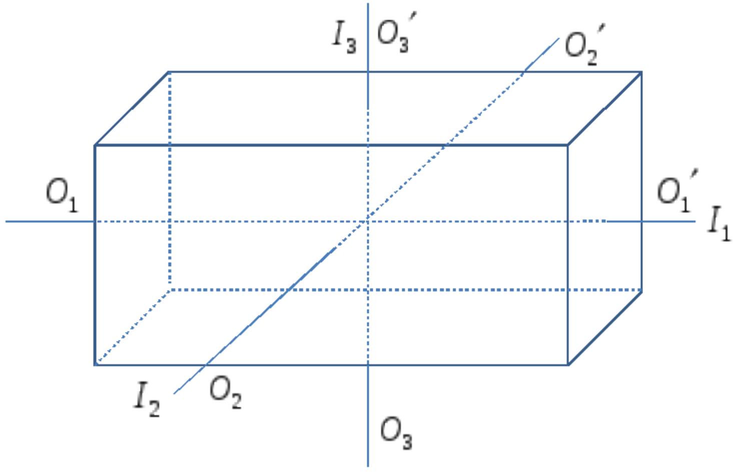


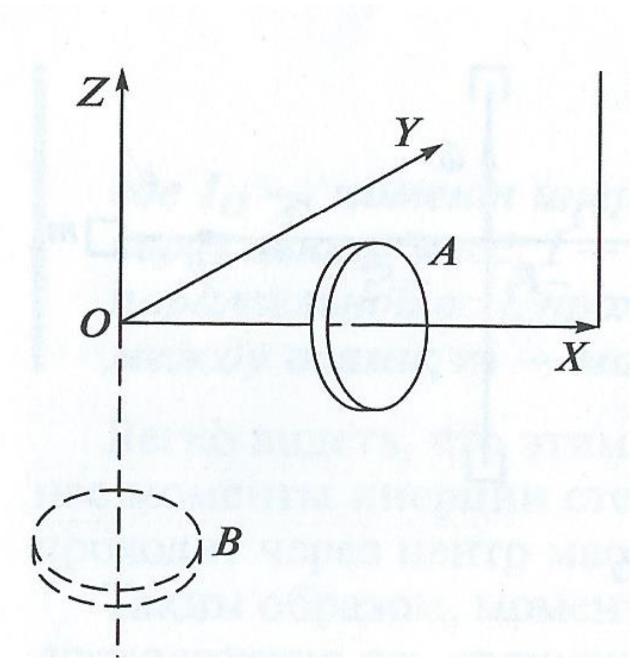
Рис 1. Радиальное биение колеса

На практике для быстро вращающегося массивного твердого тела, почти всегда необходимо, чтобы это вращение происходило *вокруг свободной оси вращения*. Колесо автомобиля, коленчатый вал двигателя, ротор электромотора, вентилятор и т.д. – все это вращается с большой угловой скоростью. Необходимо, чтобы ось вращения проходила точно через центр масс, чтобы не было вибраций и биения оси.

Гироскоп

Гироскоп – *массивное симметричное твердое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии - свободной оси вращения*. Используя закон изменения и сохранения момента импульса твердого тела, мы можем понять те, на первый взгляд непонятные и странные свойства, которые показывают гироскопы.

Гироскопический эффект

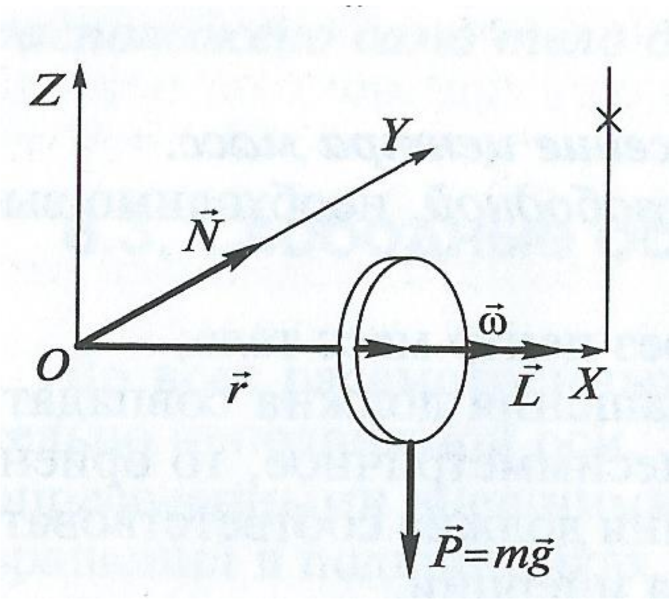


Рассмотрим следующую ситуацию:

Массивный диск висит на двух нитях и не вращается (положение *A*, рис.). Ось симметрии диска направлена вдоль оси *X*.

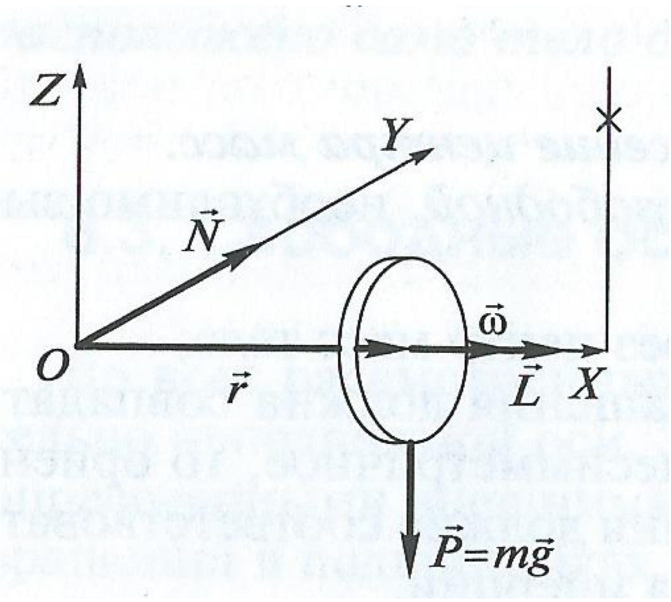
Если перерезать одну нить, то под действием силы тяжести тело опрокинется – перейдет в состояние *B*.

Гироскопический эффект



Массивный диск висит на двух нитях и быстро вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ гироскоп имеет момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$ направленный вдоль оси X (рис.). Перерезаем одну нить. Гироскоп не опрокидывается, но начинается очень медленное вращение оси гироскопа вокруг оси Z с некоторой угловой скоростью $\omega_{\text{прец}}$ - тем меньшей, чем больше I – момент инерции и $\vec{\omega}$ - скорость вращения гироскопа, то есть чем больше момент импульса $\vec{L}$ гироскопа. Это медленное вращение называется **прецессией гироскопа.**

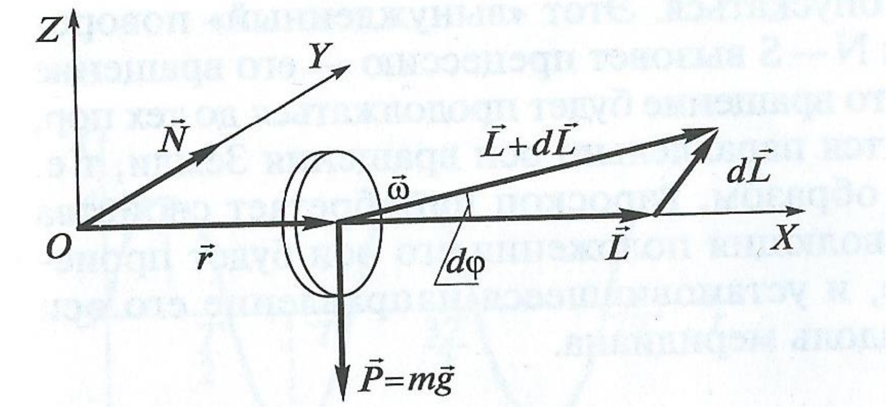
Прецессия гироскопа



Итак: сила тяжести $\vec{P}$ стремится опрокинуть гироскоп, повернув ось его вращения к оси Z; вместо этого – медленное вращение оси гироскопа вокруг оси Z – прецессия. В чем дело?

Сила тяжести создает момент относительно оси y $\vec{N}=\left[\vec{r}\cdot\vec{P}\right]=\left[\vec{r}\cdot m\vec{g}\right]$ (рис.). Как направлен момент силы $\vec{N}$? Перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{P}$, то есть плоскости XZ – вдоль оси Y!

Прецессия гироскопа



Следовательно, вдоль оси Y должно быть направлено и изменение момента импульса $d\vec{L}$ за время dt, так как $d\vec{L} = \vec{N}dt$ (рис.). Таким образом, через время dt направление момента импульса будет определяться вектором $\vec{L} + d\vec{L}$. Видно, что $dL = L\,d\varphi$, но $dL = Ndt$, т.е. $Ld\varphi = Ndt$, поэтому

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{\text{прец}} = \frac{N}{L}$$

Это и есть ***угловая скорость прецессии***, с такой угловой скоростью будет вращаться ось гироскопа вокруг оси Z. Она будет тем меньше, чем больше угловая скорость гироскопа.

Гироскопический эффект

Таким образом, поведение гироскопа можно описать следующим образом:

Если к вращающемуся вокруг оси X гироскопу приложить момент сил, стремящийся повернуть его вокруг оси У, перпендикулярной оси вращения, то в результате он будет поворачиваться (прецессировать) вокруг третьей оси Z, перпендикулярной двум первым осям.

Этот эффект, который называют гироскопическим, находит широчайшее применение в технике и в физике.

Применение гироскопического эффекта

Рассмотрим, например, стабилизацию оси ракеты. В принципе, вертикальное положение ракеты неустойчиво, малейший случайный наклон равносилен падению на бок. Пусть внутри ракеты имеется гироскоп, и он ориентирован так, что его момент импульса $\vec{L}$ и частота $\vec{\omega}$ направлены вдоль оси ракеты (ось X). Ось гироскопа закреплена в подшипниках. Если ракета начинает наклоняться (вращение вокруг оси Y), тотчас возникает тенденция к прецессии гироскопа – медленному вращению вокруг оси Z, перпендикулярной плоскости этого вращения, которой препятствуют подшипники. Давление, которое ось оказывает на подшипники, через систему датчиков передается на рули ракеты, выравнивая ее положение.

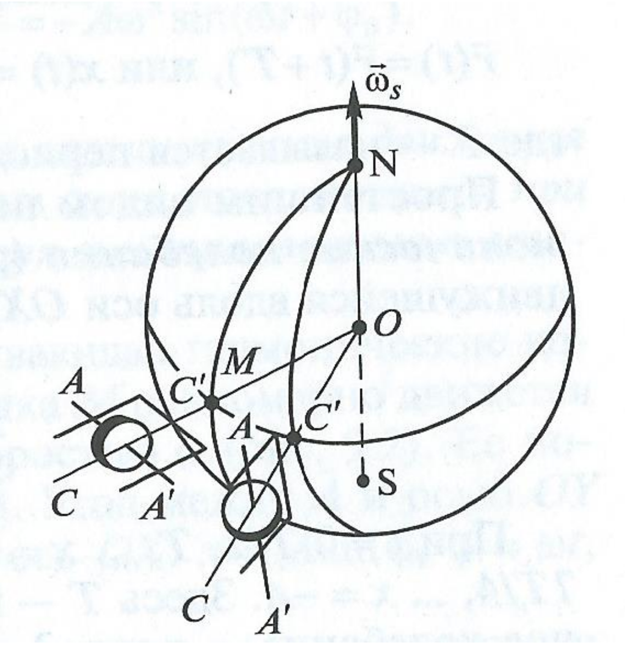
Применение гироскопического эффекта

Стабилизация двухколесной тележки с гироскопом, двухколесного автомобиля, осей снарядов и пуль, вылетающих из нарезного оружия, устойчивая езда на велосипеде и мотоцикле – следствия проявления гироскопического эффекта.

Применение гироскопического эффекта

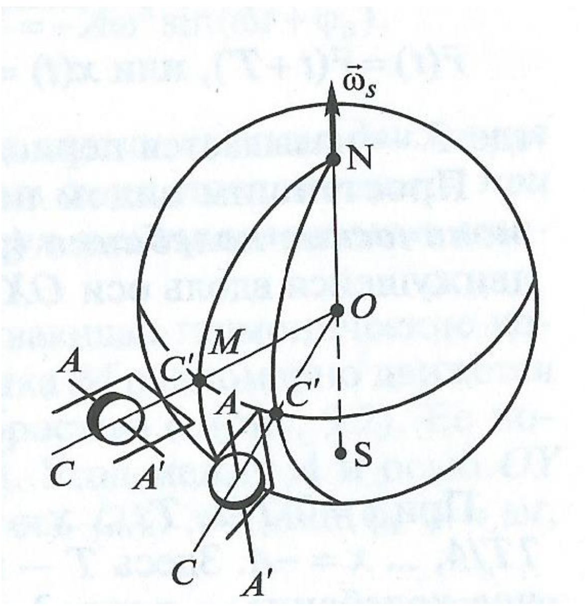
Гироскопический эффект используется для поддержания точного курса воздушных и водных судов: определение курса корабля с помощью компаса с магнитной стрелкой ушло в прошлое, поскольку на компас влияют железная масса корабля, электрические токи и магнитные аномалии. Современный прибор – гироскопический компас – указывает направление меридиана с гораздо большей точностью.

Гирокомпас



Принцип действия гирокомпаса можно описать с помощью рис. Представим себе гироскоп, установленный на экваторе в некоторой точке M так, чтобы ось его рамки CC была вертикальна к поверхности Земли, а ось вращения самого гироскопа AA в начальный момент времени направлена с запада на восток. Гироскоп будет участвовать в суточном вращении Земли, поворачиваясь вместе с ней вокруг оси $N - S$ (север – юг) с угловой скоростью $\vec{\omega}_s$

Гирокомпас



При этом восточный конец оси гироскопа будет подниматься, а западный – опускаться. Этот «вынужденный» поворот оси гироскопа вокруг оси N – S вызовет прецессию – его вращение вокруг третьей оси CC. Это вращение будет продолжаться до тех пор, пока ось AA не установится параллельно оси вращения Земли, то есть вдоль меридиана. Таким образом, гироскоп приобретает свойства компаса – указанная эволюция положения его оси будет происходить на любой широте, и установившееся направление его оси всегда будет направлено вдоль меридиана.

Гироскоп у нас в кармане

Гироскоп в современном телефоне — датчик, который позволяет автоматически менять ориентацию экрана в зависимости от положения смартфона.

Сигвей, гироскутер и моноколесо


Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,

С. 70-80.

Видеоматериалы по теме лекции смотрите на сайте swcusp.ukit.me в разделе «видеоматериалы»:

«Момент импульса», «Момент инерции», «Гироскоп»

Тема следующей лекции: Механические колебания