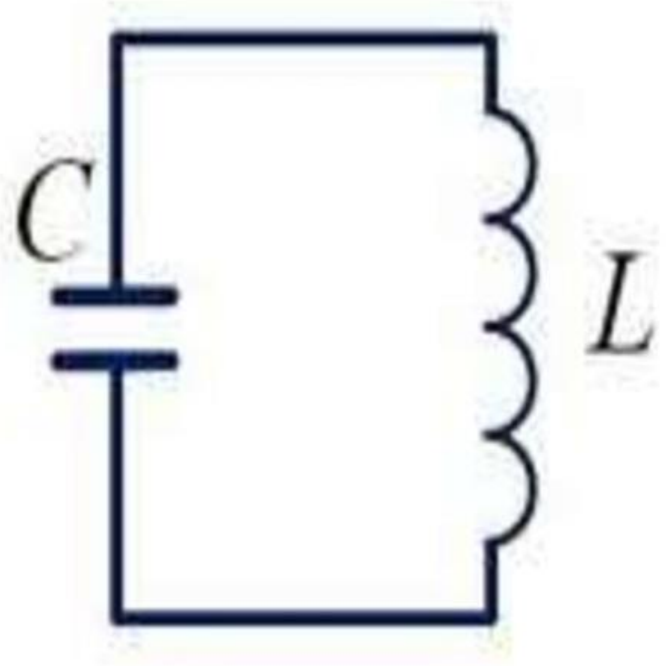
Тема семинара:
Электрические колебания и электромагнитные волны

Колебательный контур

Колебательный контур - это цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C.



Частота и период свободных незатухающих колебаний

Зависимость от времени колебания электрического заряда в колебательном контуре $q = q_0 \sin\omega_0 t$. Конденсатор в цепи LC периодически перезаряжается, в цепи идет переменный электрический ток с частотой ω_0:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q_0\omega_0 \cos\omega t = I_0 \cos\omega t.$$

Частота собственных колебаний в контуре $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$ - формула Томсона.

Задача

Когда в колебательном контуре был конденсатор 1, частота колебаний контура ν_1= 12 кГц, а когда конденсатор 1 заменили конденсатором 2, частота колебаний контура стала ν_2= 16 кГц. Чему будет равна частота колебаний при последовательном соединении конденсаторов 1 и 2?

Максимальная энергия в колебательном контуре равна $W_C = \frac{CU^2}{2}$ в момент полной зарядки конденсатора. Когда заряд на конденсаторе исчезнет, но по катушке будет идти ток, и в ней будет запасена энергия магнитного поля $W_L = \frac{LI^2}{2}$. При этом в любой момент времени в соответствии с законом сохранения энергии сумма $W_C + W_L = const$, если в цепи нет активного сопротивления; если же $R \neq 0$, то будет происходить "отток" электромагнитной энергии и постепенное превращение ее в джоулево тепло; колебания заряда и тока становятся затухающими.

Задача

Заряженный конденсатор емкостью C = 0,2 мкФ подключили к катушке с индуктивностью L = 8 мГн. Через какое время от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

Решение

По условию в начальный момент времени конденсатор был заряжен, следовательно, зависимость заряда от времени $q = q_0 \cos\omega t$. Зависимость силы тока от времени

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin\omega t$$

Искомое время найдем из условия $\frac{q^2}{2C} = \frac{Li^2}{2}$

Подставляя в последнее выражение q и i, получаем

$q_0^2 \cos^2\omega t = \omega^2 LC q_0^2 \sin^2\omega t$, откуда $\mathrm{tg}^2\omega t = 1$ или $\omega t = \pi/4$.

Следовательно $t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Ответ: $t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Затухающие колебания

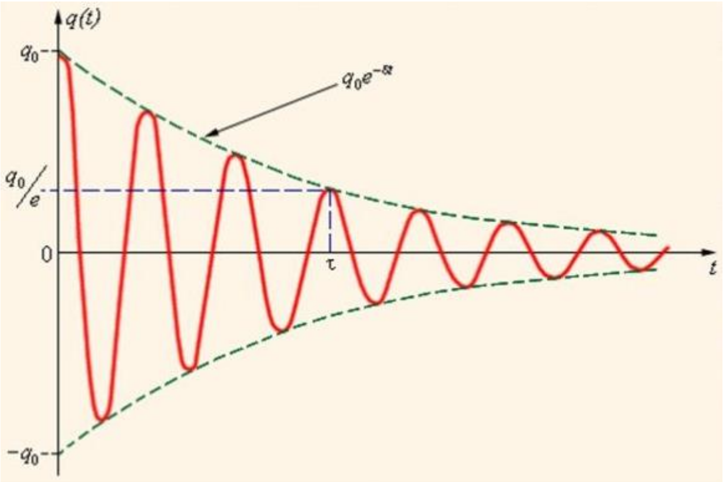
Уравнение затухающих колебаний $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0$ (1)

где $\frac{R}{L}=2\delta$, $\frac{1}{LC}=\omega_0^2$

и решение уравнения (1) имеет вид :

$q=q_0 e^{-\delta t}\sin(\omega^*\cdot t+\varphi)$, где $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega^{*2}=\omega_0^2-\delta^2$.

Зависимость затухающих колебаний – зависимости заряда от времени на конденсаторе C представлена на рис.



Декремент затухания и добротность контура

Как и в случае механических колебаний, затухающие электрические колебания характеризуются логарифмическим декрементом затухания $D_{\text{лог}}$, а также **добротностью** $Q = \dfrac{\pi}{D_{\text{лог}}}$.

$$D_{\text{лог}} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad Q = \frac{\pi}{D_{\text{лог}}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Задача

Найти время, за которое амплитуда колебаний с добротностью Q уменьшится в n раз, если циклическая частота затухающих колебаний равна ω.

Решение

Затухающие колебания тока в контуре происходят по закону:

$$I = I_0 e^{-\beta t}.$$

Тогда $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{n} = e^{-\beta t_0}$ (1)

где t_0 — время, спустя которое амплитуда колебаний тока уменьшается в n раз.

Тогда, прологарифмировав (1), получим $t_0 = \frac{\ln n}{\beta}$

Добротность колебательного контура связана с логарифмическим декрементом колебания соотношением $Q = \frac{\pi}{\Delta}$

Логарифмический декремент колебания

$$\Delta = \beta T.$$

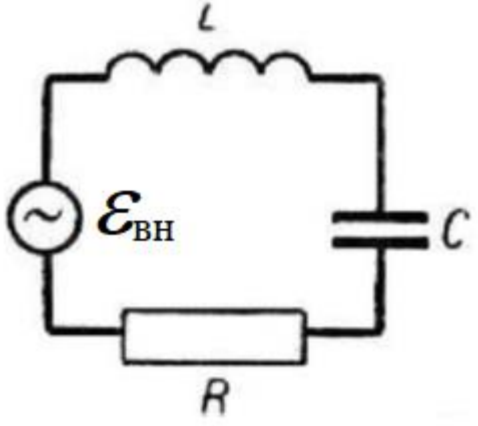
Поэтому добротность колебательного контура $Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}$

Тогда $t_0 = \frac{2Q \ln n}{\omega}$

Ответ: $t_0 = \frac{2Q \ln n}{\omega}$

Вынужденные электрические колебания и резонанс

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$



Поскольку ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\Omega\cos(\Omega\cdot t + \varphi) = I_0\cos(\Omega\cdot t + \varphi),$$

зависимость амплитуды тока от частоты имеет вид:

$$I_0 = q_0\Omega = \frac{\Omega\,\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Задача

Параметры колебательного контура имеют значения: C = 1,0 нФ, L = 6,0 мкГн, R = 0,5 Ом. Какую мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_m = 10,0 В?

Решение

Электромагнитные колебания в колебательном контуре будут незатухающими, если потери энергии за период колебания равны подведенной энергии, то есть

$$I_{д}^{2}R=\frac{I_{m}^{2}}{2}R=P \qquad (1)$$

где $I_д$ и I_m- действующее и амплитудное значения силы переменного тока. По закону сохранения энергии

$$\frac{CU_{\mathrm{m}}^{2}}{2}=\frac{LI_{m}^{2}}{2} \qquad (2)$$

Отсюда $I_{m}^{2}=\frac{CU_{\mathrm{m}}^{2}}{L}$ (3)

Тогда подводимая мощность $P=\frac{I_{m}^{2}R}{2T}$ (4)

При малом затухании период колебаний может быть найден по формуле Томсона:

$$T=2\pi\sqrt{LC} \qquad (5)$$

Тогда, учитывая (3) и (5) выражение (4) для подводимой мощности $P=\frac{CU_{m}^{2}}{2L}R$ =4,2 мВт.

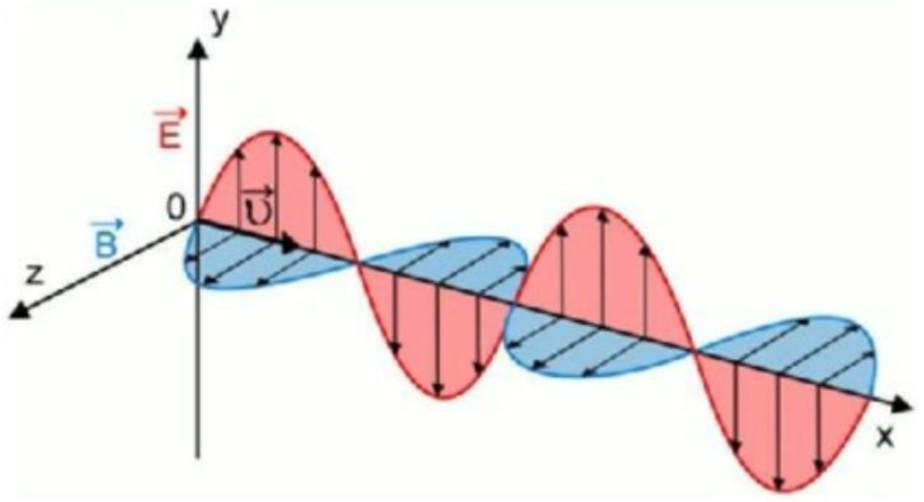
Ответ: $P=\frac{CU_{m}^{2}}{2L}R$ =4,2 мВт.

Электромагнитная волна

Электромагнитная волна – ***процесс распространения в пространстве электромагнитного поля.***

Если электрическое поле или магнитная индукция изменяются по гармоническому закону, например $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$, то в направлении, перпендикулярном векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будет распространяться гармоническая волна. При этом, если волна направлена вдоль оси x, то

$$\begin{cases} E_y = E_{y0} \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{v} \right), \\ B_z = B_{z0} \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{v} \right) \end{cases}$$



Скорость электромагнитных волн

скорость электромагнитной волны равна $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

где μ_0 и ε_0 – магнитная и электрическая постоянные соответственно, и равна скорости света.

В веществе с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ скорость света равна

$$c^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} < c$$

таким образом, когда волна попадает из пустоты в вещество, ее скорость уменьшается. В диамагнетиках, где μ, хотя и меньше единицы, но весьма близко к этому значению, $\sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon} > 1$

Задача

При изменении тока в катушке индуктивности на величину 1 А за время 0,6 с в ней индуцируется ЭДС, равная 0,2 мВ. Какую длину будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, колебательный контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью 14,1 нФ?

Решение

Длина волны, излучаемая генератором,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} \qquad (1)$$

где c = $3{\cdot}10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности: $\varepsilon_c = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Отсюда индуктивность катушки

$$L = \varepsilon_c\left|\frac{\Delta t}{\Delta I}\right| \qquad (2).$$

Тогда, подставив (2) в (1), получим: $\lambda = 2\pi c\sqrt{C\varepsilon_c\left|\frac{\Delta t}{\Delta I}\right|}$ = 2450 м.

Ответ: $\lambda = 2\pi c\sqrt{C\varepsilon_c\left|\frac{\Delta t}{\Delta I}\right|}$ = 2450 м.

.

Задачи для самостоятельного решения

1. Колебательный контур с конденсатором емкостью C_1 = 1 мкФ настроен на частоту ν_1 = 500 Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить второй конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной ν_2 = 200 Гц. Определите емкость C_2 второго конденсатора.

2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L = 0,2 мГн и двух одинаковых конденсаторов емкостью C = 4 мкФ каждый, соединенных последовательно. Определить максимальный заряд и максимальное напряжение на каждом конденсаторе. Максимальная сила тока в контуре 0,1 А.

3. Колебательный контур имеет емкость C, индуктивность L и активное сопротивление R. Найти через сколько колебаний амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Задачи для самостоятельного решения

4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно соединенные конденсатор C, катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением R, подключена к внешнему переменному напряжению, частоту которого можно менять, не меняя его амплитуды. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Найти резонансную частоту тока.

5. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки с индуктивностью $L = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинками конденсатора $d = 1$ см, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 11$. Площадь каждой пластины $S = 800$ см^2.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $C_2 = C_1\left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right] =$ 5,25 мкФ.

2. $U = I\sqrt{\frac{L}{C}}$ = 0,7 В; $q = CU$ = 2,82 мкКл.

3. $N_e = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$

4. $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$

5. $\lambda = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}$ = $2{,}4\cdot 10^3$ м.

Литература

Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, ЛА. Скипетрова. Общая физика: сборник задач. М., 2006.

Внимание: бонус!

Как известно, показатель преломления диамагнитных веществ ($\mu \approx 1$) равен квадратному корню из диэлектрической проницаемости $n = \sqrt{\varepsilon}$. Вода, являющаяся диамагнетиком, имеет $\varepsilon = 81$. Таким образом, для воды $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{81} = 9$. На самом деле показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$. Почему?

Тот, кто **первый** правильно и развернуто ответит на этот вопрос, сразу получает на экзамене по физике только один вопрос из раздела «Электричество и магнетизм». Ответы присылать на мой адрес электронной почты.