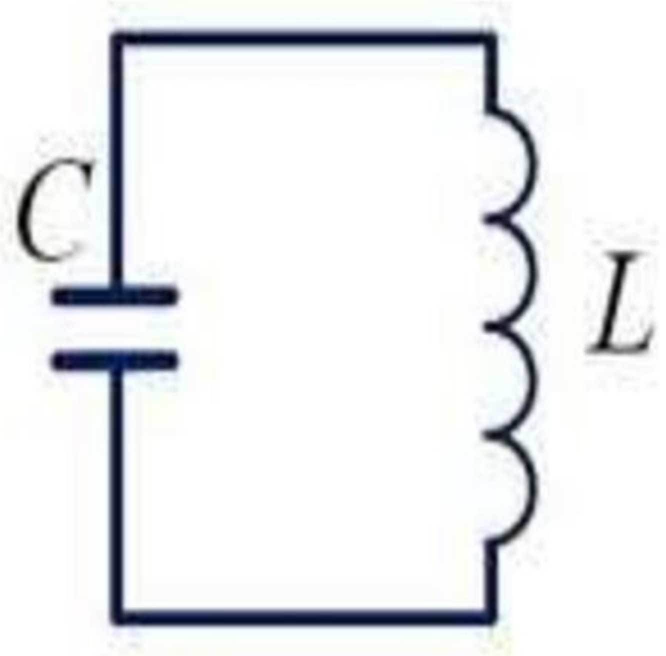
Тема лекции:
Электрические колебания

Свободные электрические колебания

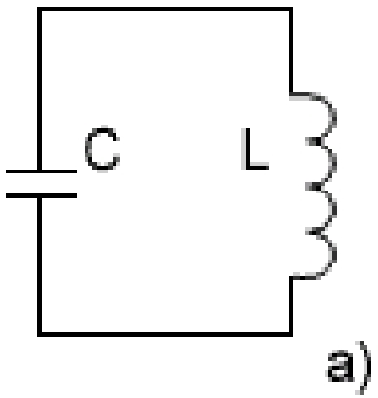
Среди электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи, электрические и магнитные поля) изменяются периодически. Для возбуждения и поддерживания электромагнитных колебаний требуются определенные системы, простейшей из которых является **колебательный контур**.

Колебательный контур

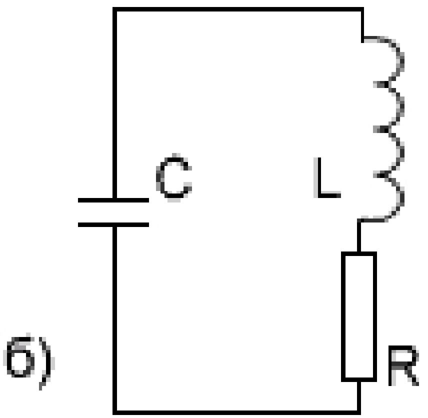
Колебательный контур - это цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C.



Идеальный и реальный колебательный контур



идеальный колебательный контур

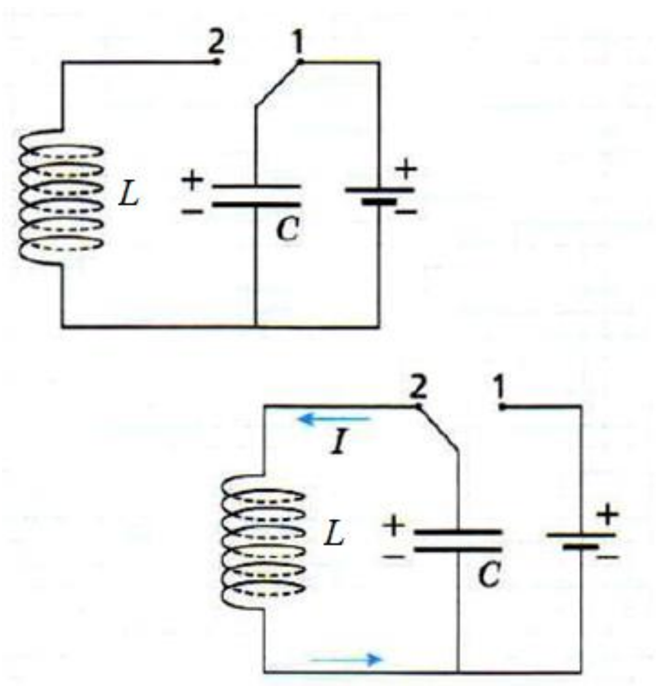


реальный колебательный контур

В **идеальном колебательном контуре** (рис. а) отсутствует электрическое сопротивление R. В нём происходят свободные незатухающие электромагнитные колебания.

Реальный колебательный контур (рис. б) состоит из конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R. В нем происходят свободные затухающие электромагнитные колебания, причём скорость затухания этих колебаний определяется сопротивлением R резистора.

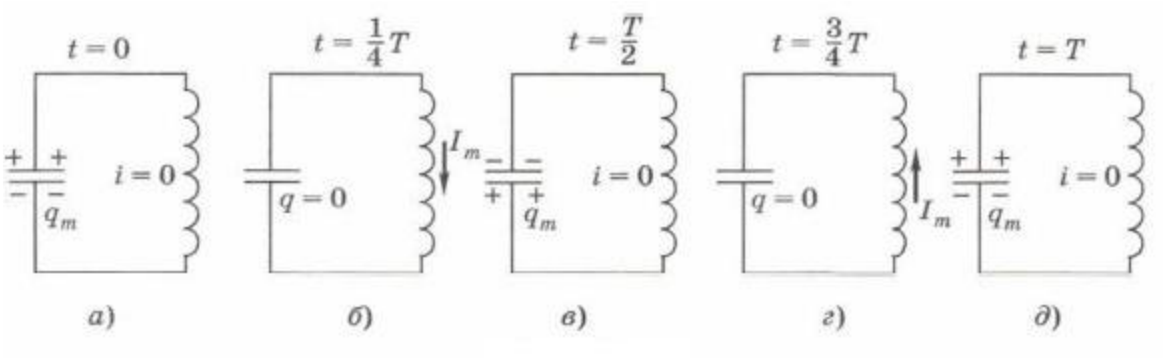
Свободные незатухающие колебания



Рассмотрим процесс возникновения электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре. Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор C предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряд q_0 от внешнего источника (рис., ключ в положении 1). Затем переводят ключ в положении 2 и конденсатор начинает разряжаться через катушку индуктивности L.

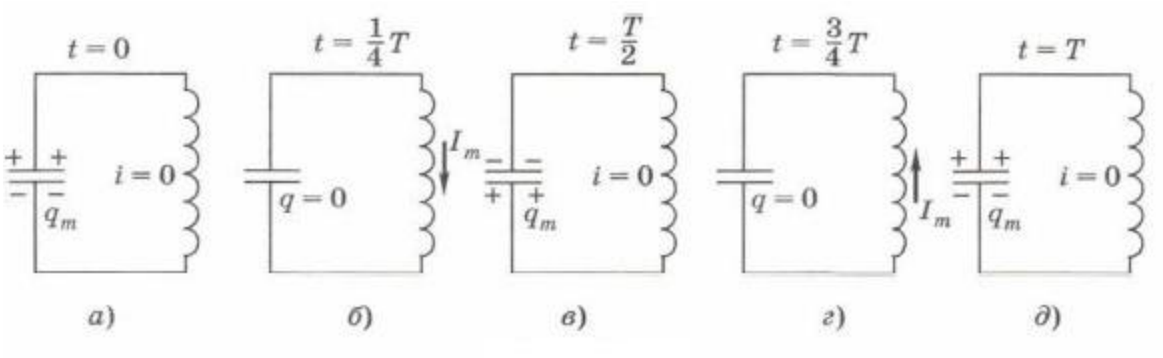
Свободные незатухающие колебания

При замыкании ключа на катушку конденсатор начинает разряжаться (рис., а). В контуре появляется электрический ток (от плюса к минусу). Сила тока увеличивается постепенно, так как возникший в катушке ток самоиндукции направлен против тока разряда конденсатора. В момент времени $T/4$ конденсатор полностью разрядится, а ток самоиндукции I_m через катушку индуктивности будет максимальным (рис., б).



Свободные незатухающие колебания

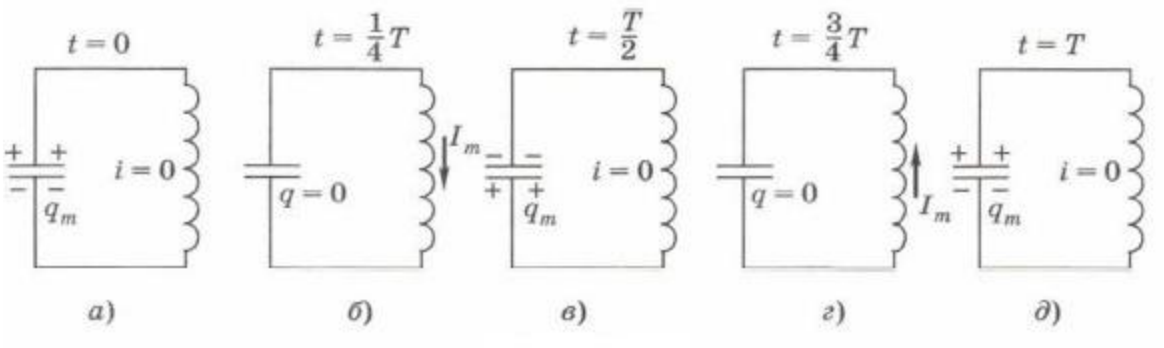
Поскольку конденсатор разряжен, сила тока в контуре начинает уменьшаться. Но теперь ток самоиндукции направлен в ту же сторону, что и ток разряжавшегося конденсатора, и препятствует его уменьшению. Благодаря току самоиндукции к моменту времени $T/2$ от начала разрядки, конденсатор перезарядится. Его заряд вновь будет равен q_m, но теперь верхняя обкладка будет заряжена отрицательно, а нижняя — положительно (рис., в)



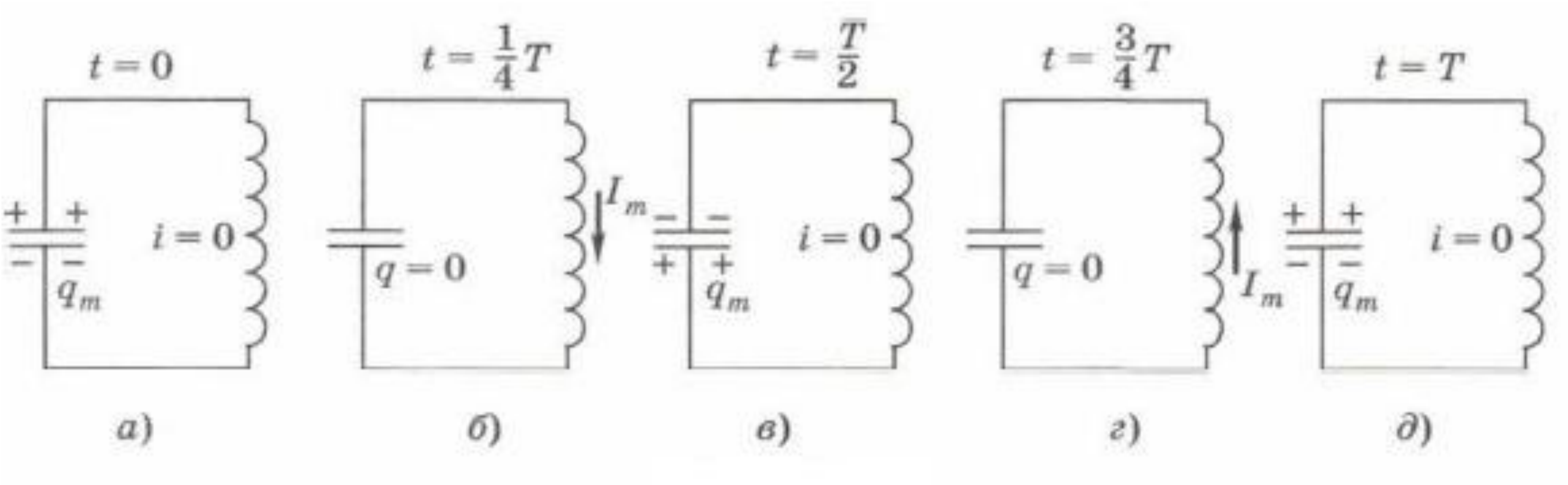
Свободные незатухающие колебания

Через промежуток времени, равный 3*T*/4, конденсатор вновь будет разряжен, а ток через катушку – максимален, но направлен уже в противоположную сторону (рис., г).

Через время *T* конденсатор будет заряжен так же, как в момент начала разрядки. (рис., д). За промежуток времени, равный *T*, произошло одно полное колебание. Таким образом *T* — период колебаний.



Свободные незатухающие колебания



Частота и период свободных незатухающих колебаний

Рассчитаем частоту и период свободных незатухающих колебаний в колебательном контуре. Электромагнитные колебания во многом подобны механическим колебаниям, т.е. подобны описывающие их уравнения и их решения.

Сумма падений напряжений в контуре равна действующей в цепи ЭДС. В контуре действует только одна ЭДС - ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{с.и.}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

а падение напряжения на конденсаторе $U_C = \dfrac{q}{C}$. Тогда

$$\frac{q}{C} = \mathcal{E}_{\text{с.и.}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Частота и период свободных незатухающих колебаний

Учитывая, что $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

имеем $L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} = 0$

или $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

Для заряда q на конденсаторе мы получили дифференциальное уравнение второго порядка. Вспомним, что аналогичное по форме уравнение мы получали в механике при анализе движения горизонтального пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Частота и период свободных незатухающих колебаний

Тогда легко видеть, что $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ или $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$ - формула Томсона.

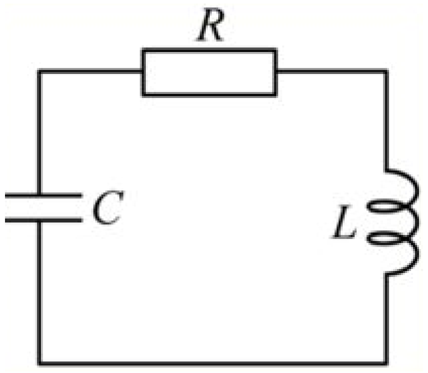
Из дифференциального уравнения по аналогии с механическими колебаниями следует $q = q_0 \sin\omega_0 t$.

Таким образом, мы получаем, что конденсатор в цепи *LC* периодически перезаряжается, в цепи идет переменный электрический ток с частотой ω_0:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q_0\omega_0 \cos\omega t = I_0 \cos\omega t.$$

За счет чего возникают гармонические колебания заряда на конденсаторе? В момент времени $t = 0$ вся энергия в цепи сосредоточена в конденсаторе и равна $W_C = \dfrac{CU^2}{2}$; затем конденсатор начинает разряжаться на индуктивность, через которую идет изменяющийся электрический ток, приводящий к возникновению ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с.и.}} = -L\dfrac{dI}{dt}$. В какой-то момент времени заряд на конденсаторе исчезнет, но по катушке будет идти ток, и в ней будет запасена энергия магнитного поля $W_L = \dfrac{LI^2}{2}$. При этом в любой момент времени в соответствии с законом сохранения энергии сумма $W_C + W_L = const$, если в цепи нет активного сопротивления; если же $R \neq 0$, то будет происходить "отток" электромагнитной энергии и постепенное превращение ее в джоулево тепло; колебания заряда и тока становятся затухающими.

Затухающие колебания



При наличии в цепи активного сопротивления *R* падение напряжения складывается из напряжения на конденсаторе *C* и резисторе *R*. Тогда

$$\frac{q}{C} + IR = \mathcal{E}_{\text{с.и.}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Вспоминая, что $I = \dfrac{dq}{dt}$, имеем

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0$$

Затухающие колебания

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0$$

Для заряда q на конденсаторе мы получили дифференциальное уравнение второго порядка. Вспомним, что аналогичное по форме уравнение мы получали в механике при анализе движения горизонтального пружинного маятника с трением

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

Тогда мы обозначали $\frac{r}{m} = 2\delta$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и получали решение в виде

$x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega^* \cdot t + \varphi)$, где $\omega^{*2} = \omega_0^2 - \delta^2$

которое описывало затухающие колебания маятника.

Затухающие колебания

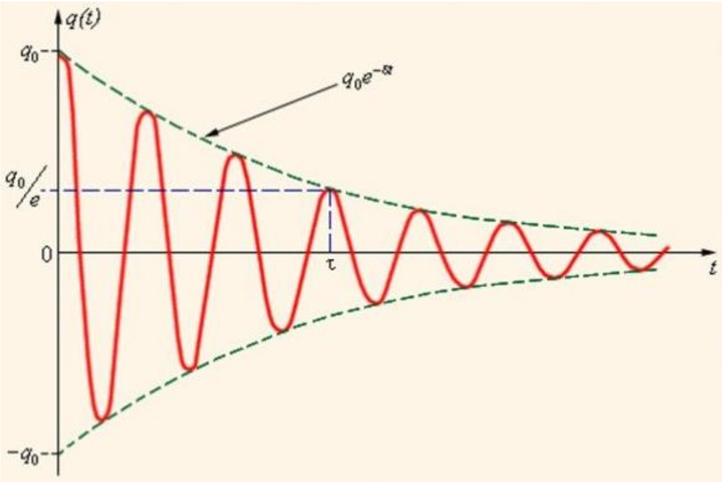
$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0 \qquad (1)$$

Для заряда q в электрическом аналоге мы можем обозначить $\frac{R}{L}=2\delta$, $\frac{1}{LC}=\omega_0^2$

и решение уравнения (1) будет иметь точно такой же вид :

$q=q_0e^{-\delta t}\sin(\omega^*\cdot t+\varphi)$, где $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega^{*2}=\omega_0^2-\delta^2$.

Зависимость затухающих колебаний – зависимости заряда от времени на конденсаторе C представлена на рис.



Декремент затухания и добротность контура

Как и в случае механических колебаний, затухающие электрические колебания характеризуются логарифмическим декрементом затухания $D_{\text{лог}}$, а также **добротностью** $Q = \dfrac{\pi}{D_{\text{лог}}}$.

Если q_n - амплитуда заряда для n-го колебания, q_{n+1} - для (n + 1)-го, то

$$D_{\text{лог}} = \ln\frac{q_n}{q_{n+1}} = \ln\frac{q_0 e^{-\delta t}\sin\left(\omega t_n + \varphi\right)}{q_0 e^{-\delta(t+T)}\sin\left[\omega\left(t_n + T\right) + \varphi\right]} = \ln e^{\delta T} = \delta T = \frac{R}{2L}2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Декремент затухания и добротность контура

Добротность контура определяется как

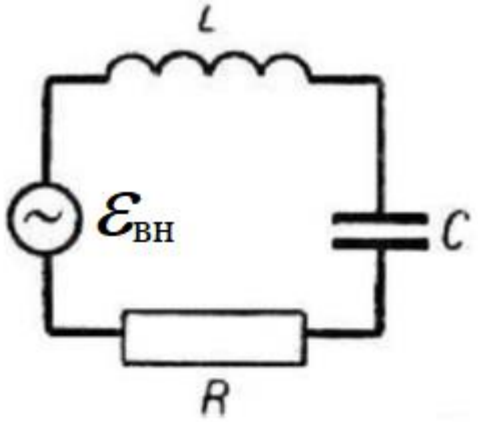
$$Q = \frac{\pi}{D_{\text{лог}}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Это наиболее широко используемая характеристика *LCR* – контура, поскольку она прямо показывает, какая часть ΔW электромагнитной энергии W уходит из контура (за счет потерь на тепловыделение) за один период:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

У контуров с большой добротностью свободные колебания затухают медленно, активное сопротивление мало. Если же R так велико, что $\Delta W \approx W$, процесс в контуре теряет колебательный характер, и изменение заряда q на конденсаторе становится апериодическим.

Вынужденные электрические колебания и резонанс



Подводя к контуру *LCR* периодически изменяющуюся внешнюю ЭДС, можно получить в нем вынужденные электрические колебания и электрический резонанс.

Рассмотрим цепь, представленную на рис., где $\mathcal{E}_{вн} = \mathcal{E}_0 \sin\Omega t$ – внешняя электродвижущая сила, так, что в контуре действует полная ЭДС, равная

$$\mathcal{E}_{\Sigma} = \mathcal{E}_{вн} + \mathcal{E}_{с.и.} = \mathcal{E}_0 \sin\Omega t - L\frac{dI}{dt}$$

Здесь Ω - круговая частота внешней ЭДС. Имеем

$$\frac{q}{C} + IR = \varepsilon_0 \sin\Omega t - L\frac{dI}{dt}$$

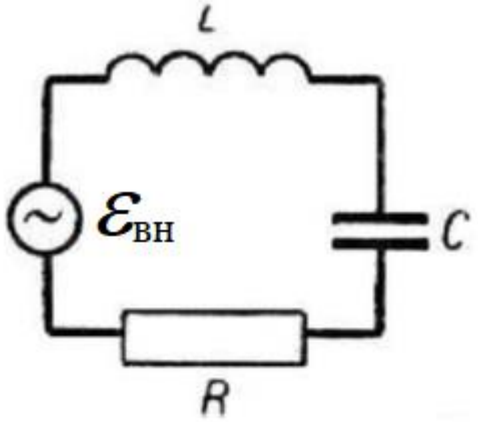
или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\Omega t$$

$$\frac{R}{L} = 2\delta \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Вынужденные электрические колебания и резонанс

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\Omega t$$



Это уравнение полностью совпадает по форме со своим механическим аналогом. Его решение нам известно и имеет вид

$q=q_0\sin(\Omega\cdot t+\varphi)$,

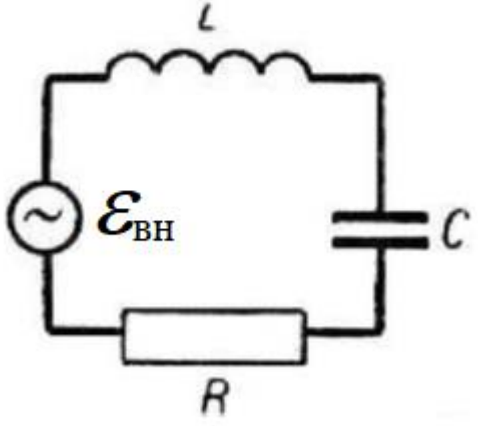
колебания заряда на конденсаторе происходят с частотой вынуждающей ЭДС.

При этом амплитуда колебаний заряда зависит от частоты и имеет вид:

$$q_0=\frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}$$

Вынужденные электрические колебания и резонанс

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$



Поскольку ток в контуре

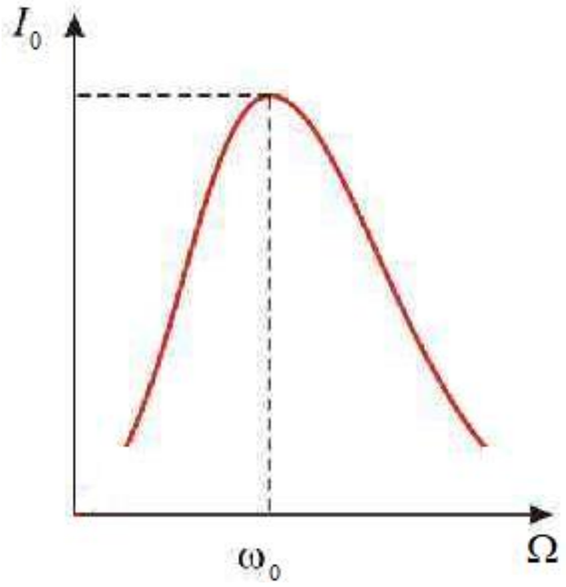
$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\Omega\cos(\Omega \cdot t + \varphi) = I_0\cos(\Omega \cdot t + \varphi),$$

зависимость амплитуды тока от частоты имеет вид:

$$I_0 = q_0\Omega = \frac{\Omega\, \varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Вынужденные электрические колебания и резонанс

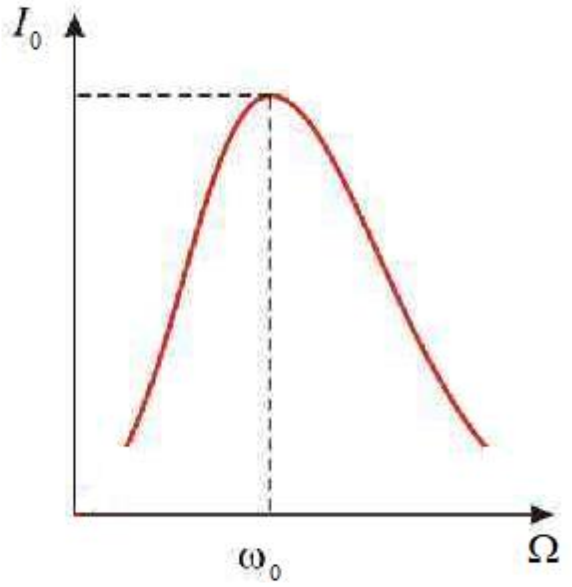
$$I_0 = q_0\Omega = \frac{\Omega\, \varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$



Видно, что при $\Omega \to \omega_0$ амплитуда колебаний и заряда, и тока увеличиваются (при R = 0, δ = 0, при этом $I_0 \to \infty$, когда $\Omega \to \omega_0$), и зависимость $I(\Omega)$ имеет вид, представленный на рис.

Вынужденные электрические колебания и резонанс

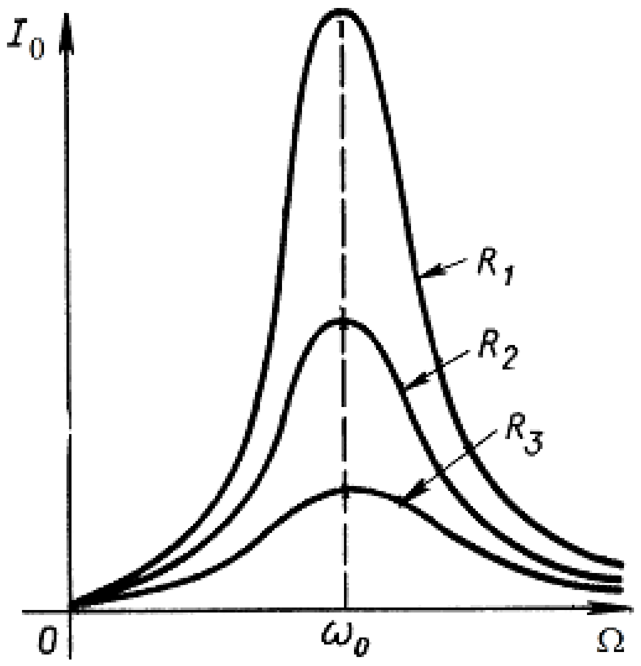
$$I_0 = q_0\Omega = \frac{\Omega \,\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$



Поскольку $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, то путем несложных преобразований уравнения, записанного выше, получаем $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$

Видно, что максимальная амплитуда тока достигается при $\Omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ и равна $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}_0}{R}$

Вынужденные электрические колебания и резонанс



Явление электрического резонанса заключается в том, что при приближении частоты внешней («вынуждающей») ЭДС к собственной частоте колебаний контура амплитуда колебаний заряда на конденсаторе и тока в контуре резко возрастают. При этом на частоте ω_0 индуктивное и емкостное сопротивления компенсируют друг друга, и ток в цепи определяется только активным сопротивлением R контура.

На рисунке изображены три резонансные кривые, причем сопротивления $R_1<R_2<R_3$.

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011, С. 228-233.

Тема следующей лекции:

Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Шкала электромагнитных волн.