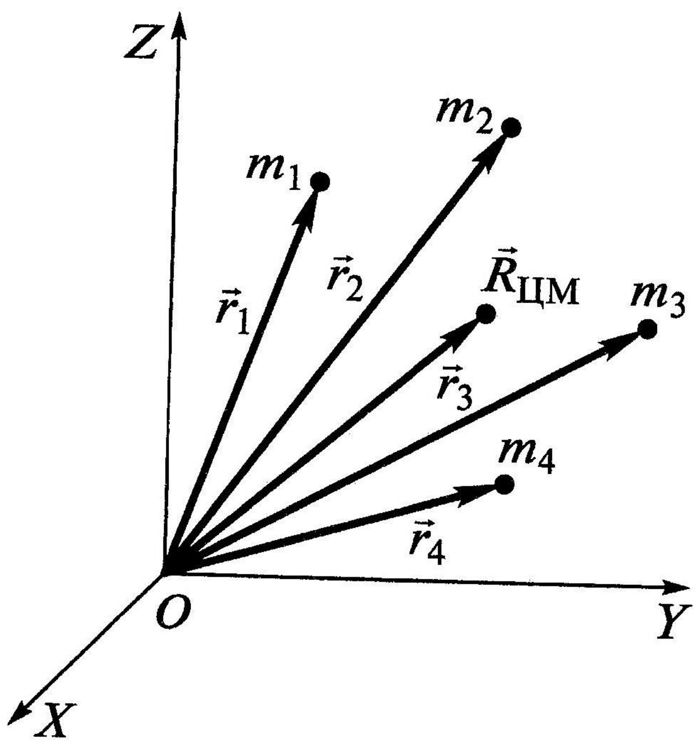
Тема лекции:
Динамика системы материальных точек. Центр масс системы и закон его движения. Законы изменения и сохранения импульса

Динамика системы материальных точек

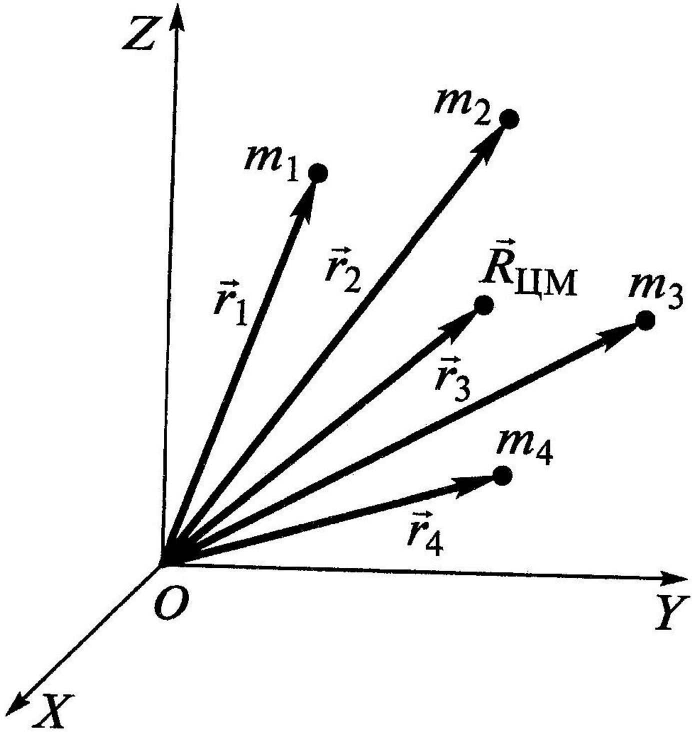
Мы переходим к изучению систем взаимодействующих материальных тел. Природа сил взаимодействия пока несущественна. По существу, говоря о гравитационных силах, силе тяжести, весе тела, мы уже априори как бы имеем в виду систему, состоящую из двух взаимодействующих тел, одним из которых была Земля. Однако масса Земли так велика, что мы имеем возможность ввести силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, действующую на данное тело массы m и как бы забыть о другом теле, так как сила такой величины не оказывает практически никакого воздействия на движение Земли.

Динамика системы материальных точек



Теперь мы рассмотрим более общую задачу о характере движения в системе, состоящей из N тел, взаимодействующих между собой: m_1, m_2,…m_N (см. рис.). В частности, и любое тело произвольной формы мы можем рассматривать как состоящее из большого числа малых масс Δm_i, объема ΔV_i, связанных между собой внутренними силами взаимодействия, удерживающих эти массы в теле.

Динамика системы материальных точек



Частица i в системе взаимодействует с частицей j с силой $\vec{F}_{ij}$, а частица j взаимодействует с частицей i с силой $\vec{F}_{ji}$, при этом $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ Силы $\vec{F}_{ij}$ (i, j = 1, 2, …, N) – внутренние силы, действующие в системе. *Система взаимодействующих масс, в которой действуют только внутренние силы, называется* **замкнутой**.

Динамика системы материальных точек

В **незамкнутой системе** на каждую частицу m_i может действовать сила $\vec{F}_i$ внешняя по отношению к системе, например, сила тяжести. Если положение каждого тела – материальной точки – определяется радиус-вектором $\vec{r}_i$ в общем случае незамкнутой системы необходимо учитывать и внутренние, и внешние силы, действующие на каждую массу, и уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_1, \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_N \dfrac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_N, \end{cases}$$

Динамика системы материальных точек

или, более кратко

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i \text{ , } i = 1, 2, \dots , N \text{ , } i \neq k \qquad (1).$$

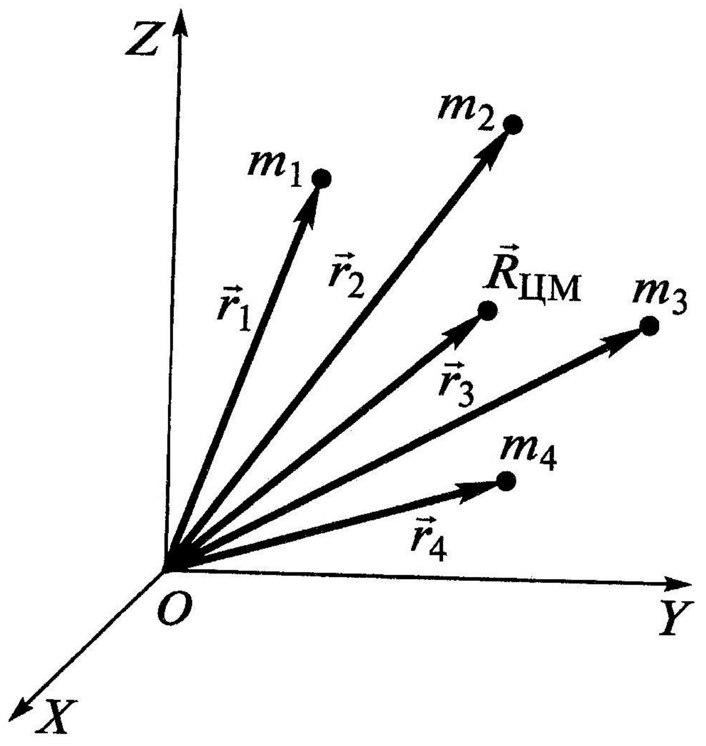
Задача о нахождении закона движения каждой частицы системы $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$, т.е. решение системы уравнений (1) в общем случае очень сложна.

Динамика системы материальных точек

Однако существует несколько строгих и очень общих теорем и законов, которые хотя и не дают возможность найти закон движения каждой точки системы, но дают важную информацию о движении системы в целом. Это:

1. Теорема о движении центра масс системы.
2. Закон изменения и сохранения импульса системы.
3. Закон изменения и сохранения механической энергии системы.
4. Закон изменения и сохранения момента импульса системы.

Центр масс

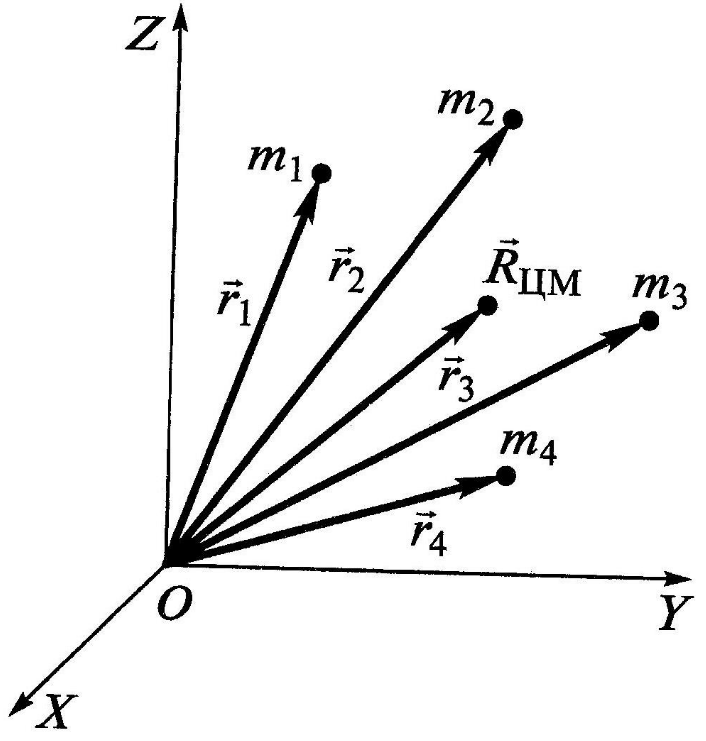


Сначала определим само понятие **«центр масс системы материальных точек»**.

Положение центра масс задается следующим радиус-вектором (рис.):

$$\vec{R}_{ц.м.} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3 + \ldots + \vec{r}_N m_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{M}$$

Центр масс



Конец этого вектора определяет некоторую точку с координатами

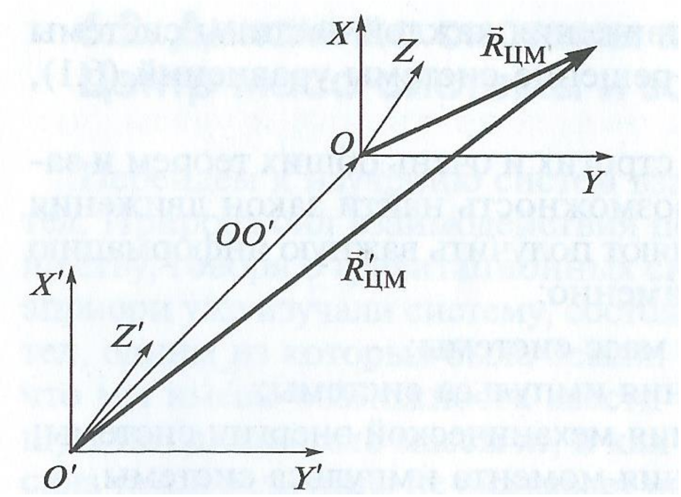
$$x_{ц.м.} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots + x_N m_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{M}$$

$$y_{ц.м.} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + \ldots + y_N m_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{M}$$

$$z_{ц.м.} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + \ldots + z_N m_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{M}$$

являющуюся центром масс системы.

Центр масс



Отметим, что положение точки, определяемой радиус-вектором $\vec{R}_{\text{ц.м.}}$ зависит только от относительного расположения взаимодействующих масс в системе и не зависит от выбора положения точки начала координат. Если $\vec{R}_{\text{ц.м.}}$ - радиус-вектор центра масс в системе X, Y, Z, а $\vec{R}'_{\text{ц.м.}}$ в системе X', Y', Z' и $\overrightarrow{OO'}$ – вектор, показанный на рис., то в штрихованной системе мы получим $\vec{R}'_{\text{ц.м.}} = \vec{R}_{\text{ц.м.}} + \overrightarrow{OO'}$ – т.е. ту же самую точку.

Центр масс

Пусть мы имеем всего две взаимодействующие массы m_1 и m_2 на расстоянии l друг от друга (см. рис.). Выберем систему координат так, что ее начало (т. O) лежит в точке m_1 и направим в сторону m_2 ось X.

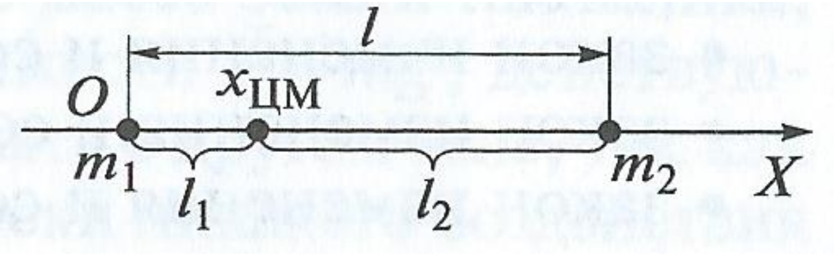
По определению имеем для координаты центра масс

$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1 \cdot 0 + l \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l$$

, то есть

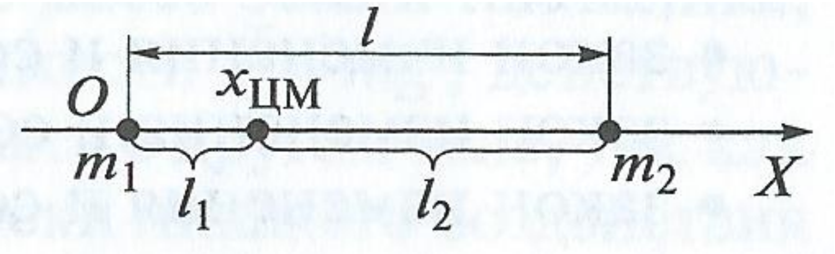
$$x_{\text{ц.м.}} = l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (l_1 + l_2)$$

где l_1 – расстояние от точки O до центра масс.



Центр масс

Таким образом $l_1 m_1 + l_1 m_2 = l_1 m_2 + l_2 m_2$ и $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$ – условие определяющее положение центра масс для простейшей системы, состоящей из двух материальных точек. *Центр масс всегда сдвинут в сторону большей массы*.



Центр масс

Естественно задать вопрос: чем замечательна точка с радиус-вектором $\vec{R}_{\text{ц.м.}}$?

Представим себе снаряд, вылетающий из ствола пушки под углом к горизонту. В некоторой точке траектории он взрывается и разлетается на множество осколков, некоторые из которых летят вперед, другие назад, вбок и т.д. Казалось бы, возникает полный беспорядок. Оказывается, что в этой системе имеется некоторая точка – а это и есть центр масс – которая продолжает двигаться точно по той же траектории, по которой двигался бы снаряд, если бы он не взорвался. Это следует из следующей теоремы.

Теорема о движении центра масс

Центр масс системы материальных точек двигается так, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Доказательство.

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

Но $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ по третьему закону Ньютона. Тогда имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Теорема о движении центра масс

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Обозначим массу всей системы $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ тогда последнее уравнение принимает следующий вид:

$$M \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\vec{r}_i}{M}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Величина в скобках есть по определению радиус-вектор центра масс $\vec{R}_{\text{ц.м.}}$, следовательно, имеем

$$M \frac{d^2\vec{R}_{\text{ц.м.}}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Теорема о движении центра масс

Это уравнение движения для точки с радиус-вектором $\vec{R}_{\text{ц.м.}}$ и массой $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

$$M\,\frac{d^2\vec{R}_{\text{ц.м.}}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

под действием силы, являющейся векторной суммой всех действующих на систему внешних сил. Теорема доказана.

Теорема о движении центра масс

В нашем примере со снарядом точка под названием «центр масс системы» будет продолжать двигаться по той же траектории, по которой двигался бы неразорвавшийся снаряд.

Если система *замкнута,* то есть все $\vec{F}_i = 0$ или равнодействующая всех внешних сил $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$, центр масс двигается равномерно и прямолинейно независимо от того, как двигается в отдельности каждая материальная точка системы.

Теорема о движении центра масс

Как уже отмечалось, *всякое массивное твердое тело может рассматриваться как совокупность малых взаимодействующих друг с другом элементов,* то есть оно представляет собой *частный случай системы материальных точек*. Поэтому законы, установленные для системы материальных точек, справедливы и для тела как целого. Соотношение

$$\vec{R}_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{M}$$

переходит для твердого тела в интегральное соотношение

$$\vec{R}_{\text{ц.м.}} = \frac{\int\limits_{V} \vec{r}\,dm}{M}$$

поскольку мы можем разбить тело на очень малые массы dm и перейти от суммирования к интегрированию ($N \to \infty$). Таким образом, можно утверждать, что *центр масс твердого тела двигается как материальная точка, к которой приложены все действующие на тело внешние силы*.

Импульс

Перепишем уравнение второго закона Ньютона в следующем виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{F}\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

Таким образом мы ввели новую величину пропорциональную скорости и называемую **импульсом:**

$$\vec{p}=m\frac{d\vec{r}}{dt}=m\vec{v}$$

Импульс обладает рядом полезных свойств. Если i – тая материальная точка входит **в систему**, то производная ее импульса

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\vec{F}_{ij}+\vec{F}_i\,,\quad i = 1, 2, \dots N.$$

Импульс

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \; , \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Здесь $\vec{F}_{ij}$ – внутренние силы, $\vec{F}_i$ – внешние силы, действующие в системе.

Полный импульс системы равен векторной сумме импульсов отдельных материальных точек:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Закон изменения импульса

Складывая *N* уравнений движения, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

так как сумма всех внутренних сил обращается в нуль согласно третьему закону Ньютона. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

Это – закон *изменения* импульса системы взаимодействующих материальных точек.

Закон сохранения импульса

Если на систему не действуют внешние силы (система замкнута) или их сумма равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0$$

То есть $\vec{P} = const$.

В замкнутой системе взаимодействующих материальных точек полный импульс системы $\vec{P}_\Sigma = \sum_i m_i \vec{v}_i$ *сохраняется, то есть не изменяется со временем*.

Это – закон *сохранения* импульса системы взаимодействующих материальных точек.

Закон сохранения импульса

Вообще говоря, мы имеем три уравнения

$$\frac{d}{dt}P_x = F_x \quad \frac{d}{dt}P_y = F_y \quad \frac{d}{dt}P_z = F_z$$

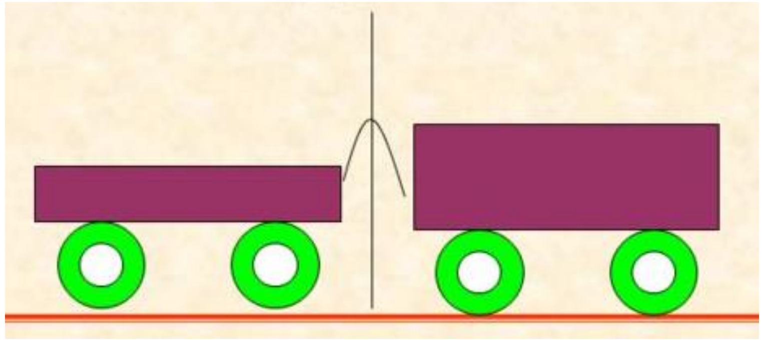
где F_x, F_y , F_z – суммарные компоненты внешних сил по осям, соответственно, X, Y, Z.

Если внешние силы, действующие на систему, таковы, что по какой-то из осей координат суммарная компонента внешних сил равна нулю, то сохраняется проекция импульса на эту ось. Например, если x-компонента равнодействующей всех внешних сил $F_x = 0$, то сохраняется величина P_x, а компоненты P_y и P_z полного импульса системы могут изменяться.

.

Закон сохранения импульса: пример.

Пусть систему составляют два взаимодействующих тела – например, две тележки на воздушной подушке, связанные пружинкой, которые могут двигаться без трения вдоль направляющего рельса. В начальный момент времени оба тела с массами m_1 и m_2 покоятся и между ними зажата пружинка (внутренняя сила упругости!). Каково соотношение скоростей этих тел после того, как пружинку освободили, и тележки начинают двигаться?

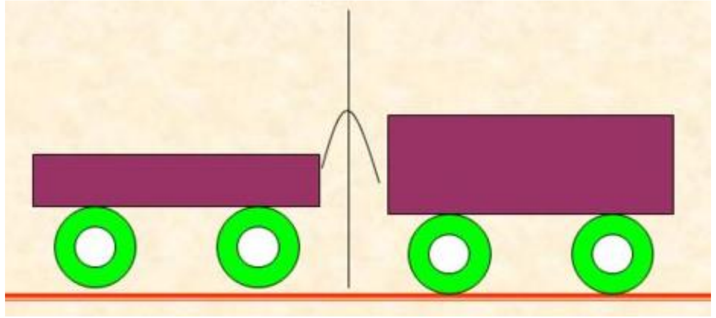


Закон сохранения импульса: пример.

Используем закон сохранения импульса:

$$\underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}_{\text{до разлета}} = \underbrace{\vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'}_{\text{после разлета}} = 0$$

Следовательно, $\vec{p}_1{}' = -\vec{p}_2{}'$, $m_1 v_1 = -m_2 v_2$, $\dfrac{v_1{}'}{v_2{}'} = -\dfrac{m_2}{m_1}$ – соотношение скоростей тележек после начала движения. Знак «минус» означает, что скорости тележек направлены в разные стороны.

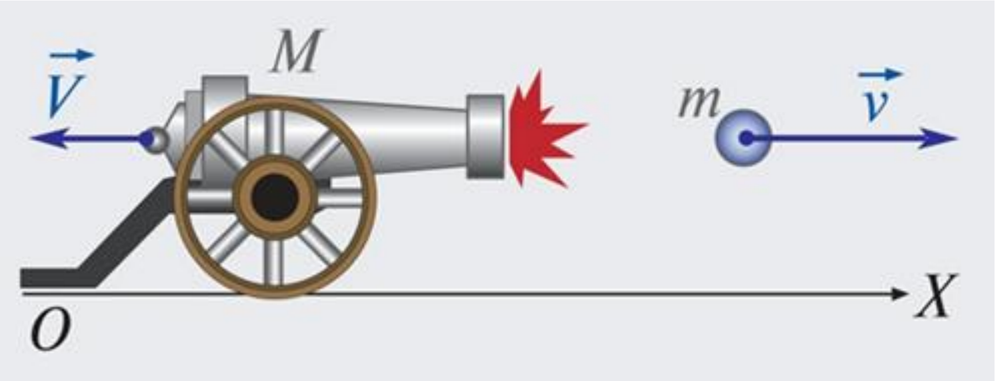


Закон сохранения импульса: другой пример.

Из пушки вылетает снаряд – под действием внутренних сил давления пороховых газов. Снаряд и пушка двигаются в противоположные стороны, при этом

$$V_{\text{пушки}} = -\frac{v_{\text{сн.}} \cdot m_{\text{сн.}}}{M_{\text{пушки}}}, \frac{m}{M} << 1 \quad \frac{V_{\text{пушки}}}{v_{\text{сн.}}} << 1$$

и пушка лишь слегка смещается при выстреле, «отдача» мала.



Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,

С. 50-56.

Видеоматериалы по теме лекции смотрите на сайте swcusp.ukit.me в разделе «видеоматериалы»:

«Центр масс», «Закон сохранения импульса»

Тема следующей лекции: Кинетическая и потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии