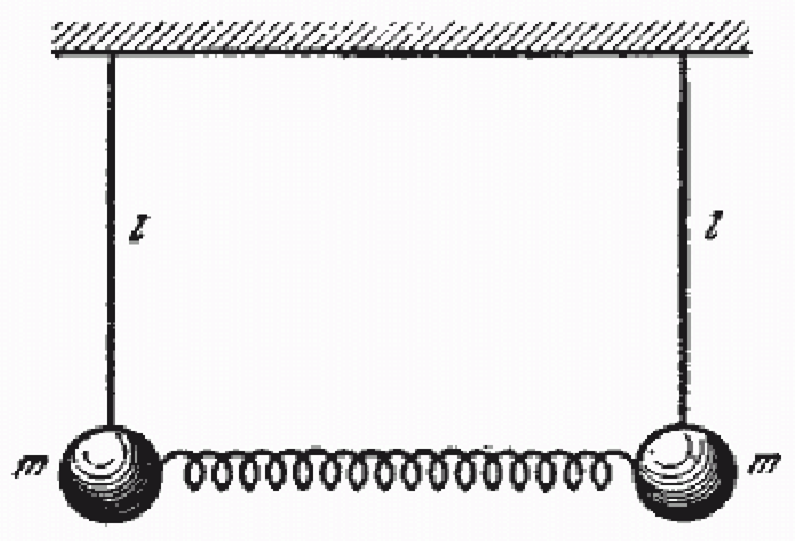
Тема лекции:

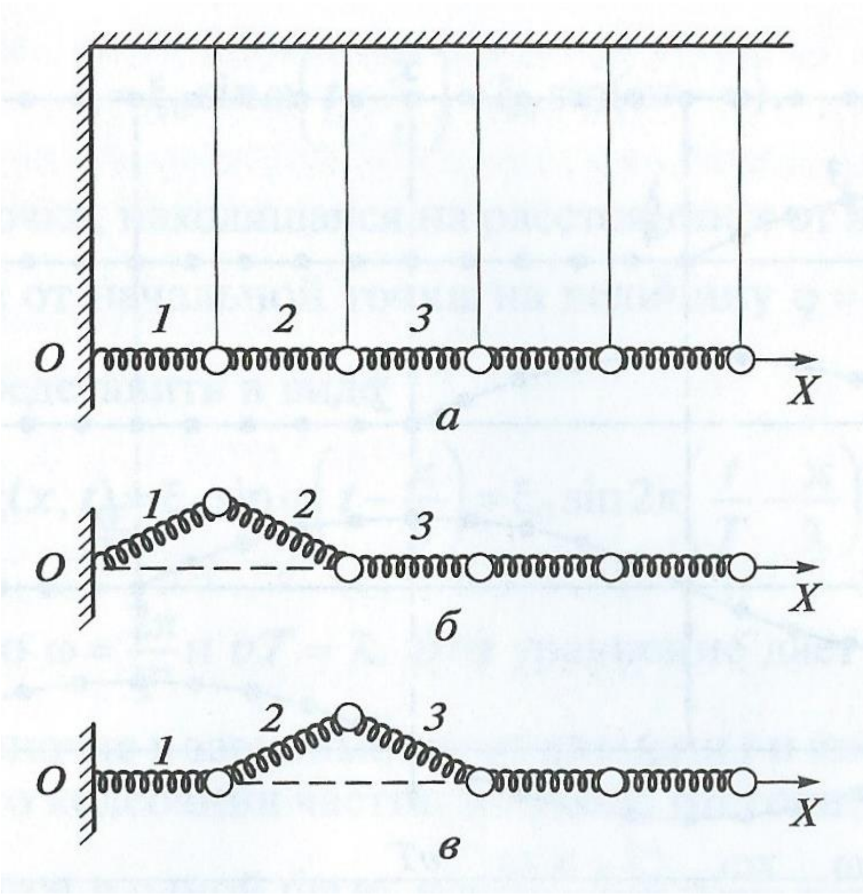
Волны в упругих средах. Уравнение плоской волны. Бегущие и стоячие волны. Перенос энергии упругими волнами

Связанные маятники



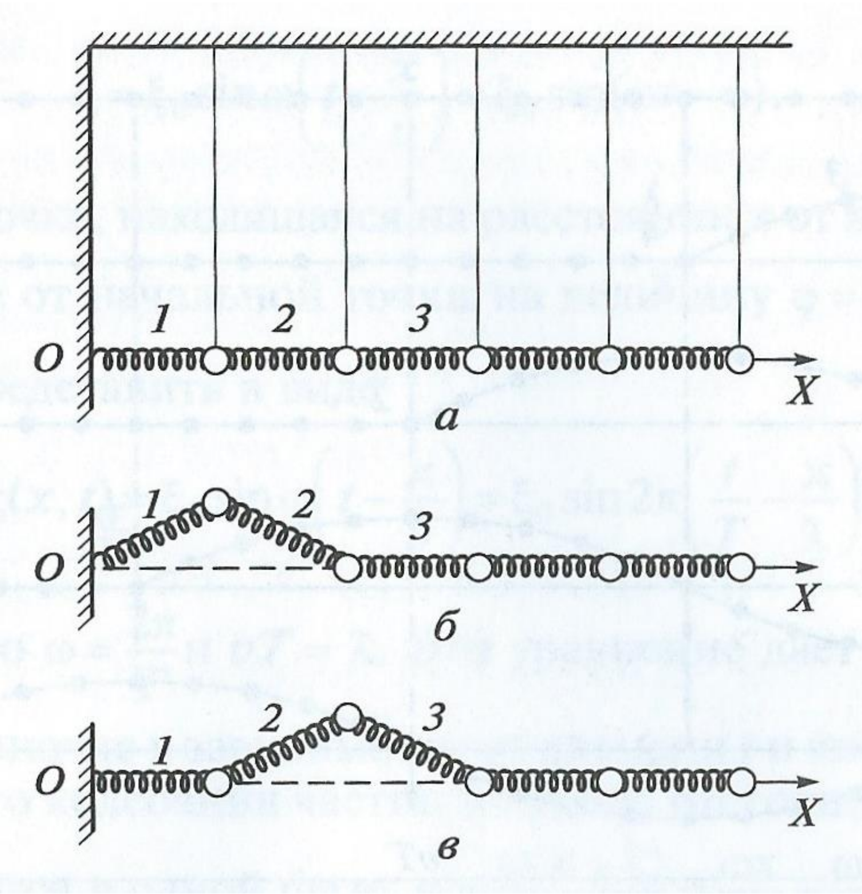
При колебаниях механических систем происходит только переход энергии из потенциальной в кинетическую и обратно, полная энергия (при отсутствии затухания, обусловленного силами трения) остается постоянной и локализованной внутри системы. Рассмотрим теперь колебательную систему, состоящую из двух маятников, связанных пружиной. Если толкнуть один из маятников, то спустя некоторое время начнет раскачиваться и второй. То есть при наличии упругой связи между маятниками необходимо рассматривать также процесс перехода энергии от одного маятника к другому.

Волна. Одномерная модель



Рассмотрим теперь более сложный пример – цепочку маятников, связанных пружинками (см. рис. а). Благодаря наличию упругой связи между шариками, если мы толкнем первый шарик, то есть сообщим ему некоторую скорость в направлении, перпендикулярном к цепочке, шарик выходит из положения равновесия (рис. б, вид снизу). При этом пружинки 1 и 2 растянутся и создадут силу, тормозящую первый шарик и «тянущую» его обратно к положению равновесия. Но растянутая пружина 2 тянет второй шарик и сообщает ему ускорение. Он начинает двигаться, то есть энергия отбирается от первого шарика и передается другому. В момент, когда первый шарик вернется к положению равновесия, второй достигнет максимального отклонения. Пружины 2 и 3 окажутся растянутыми (рис. в), и пружина 3 начнет выводить из положения равновесия третий шарик и т.д.

Упругая волна

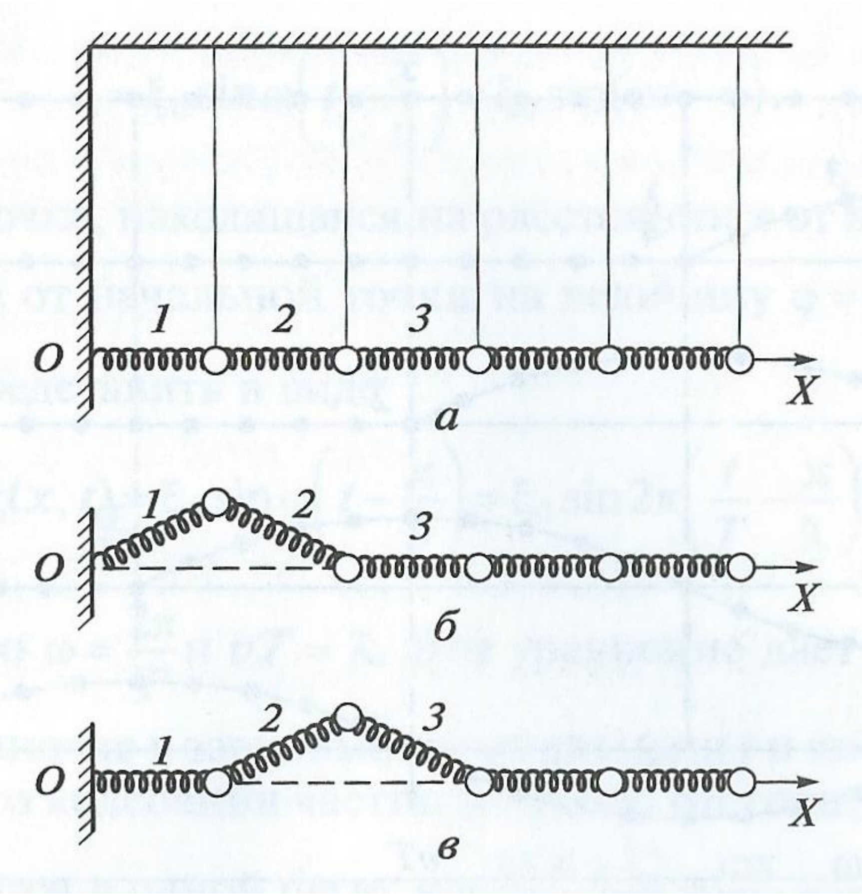


Таким образом, оказывается, что все шарики последовательно совершают одинаковые движения, *но с некоторым запаздыванием по времени*. В итоге сообщенное первому шарику импульсное возмущение побежит по цепочке – тем быстрее, чем жестче пружины и легче массы.

Если первой массе сообщить не однократный импульс, а поддерживать в нем гармонические колебания, то благодаря наличию упругой связи между шариками, колебательное движение будет передаваться соседним шарикам, и по цепочке вдоль оси *x* «побежит» упругая волна смещений.

Процесс распространения колебаний в упругой среде называется упругой волной.

Продольные и поперечные волны

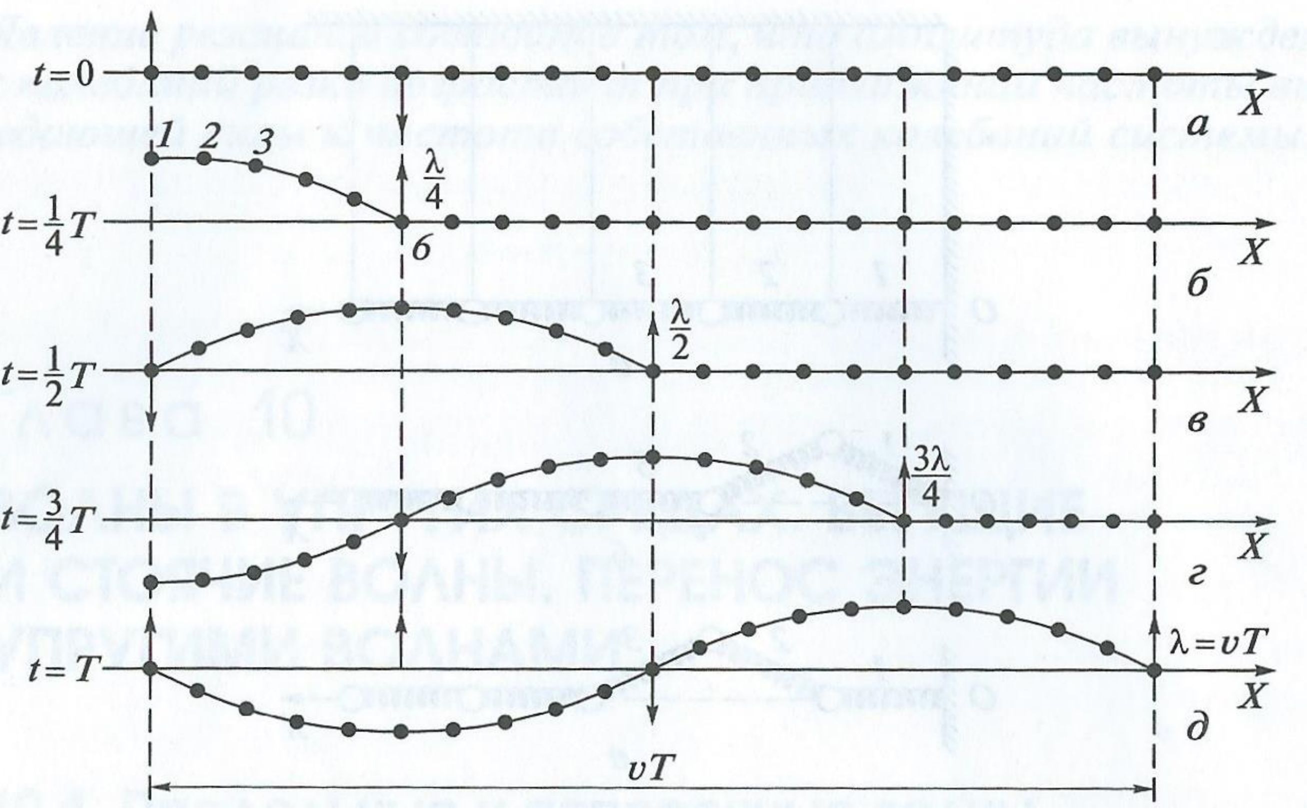


Каждая масса m в нашей модели может смещаться на величину $\vec{\xi}$; если вектор $\vec{\xi}$ перпендикулярен оси x, то волна называется **поперечной**, если $\vec{\xi}$ параллелен x, то волна называется **продольной**.

Важно подчеркнуть следующие моменты:

1. Распространение колебаний по цепочке происходит *с определенной конечной скоростью v.*
2. За время T, равное одному периоду колебаний массы m_1, начинает колебательный процесс масса m_n, отстоящая от начала координат на расстояние vT.
3. Каждая масса двигается по тому же закону, что и первая, *но с другой фазой,* зависящей от расстояния x между массами.

Одномерная модель упругой волны

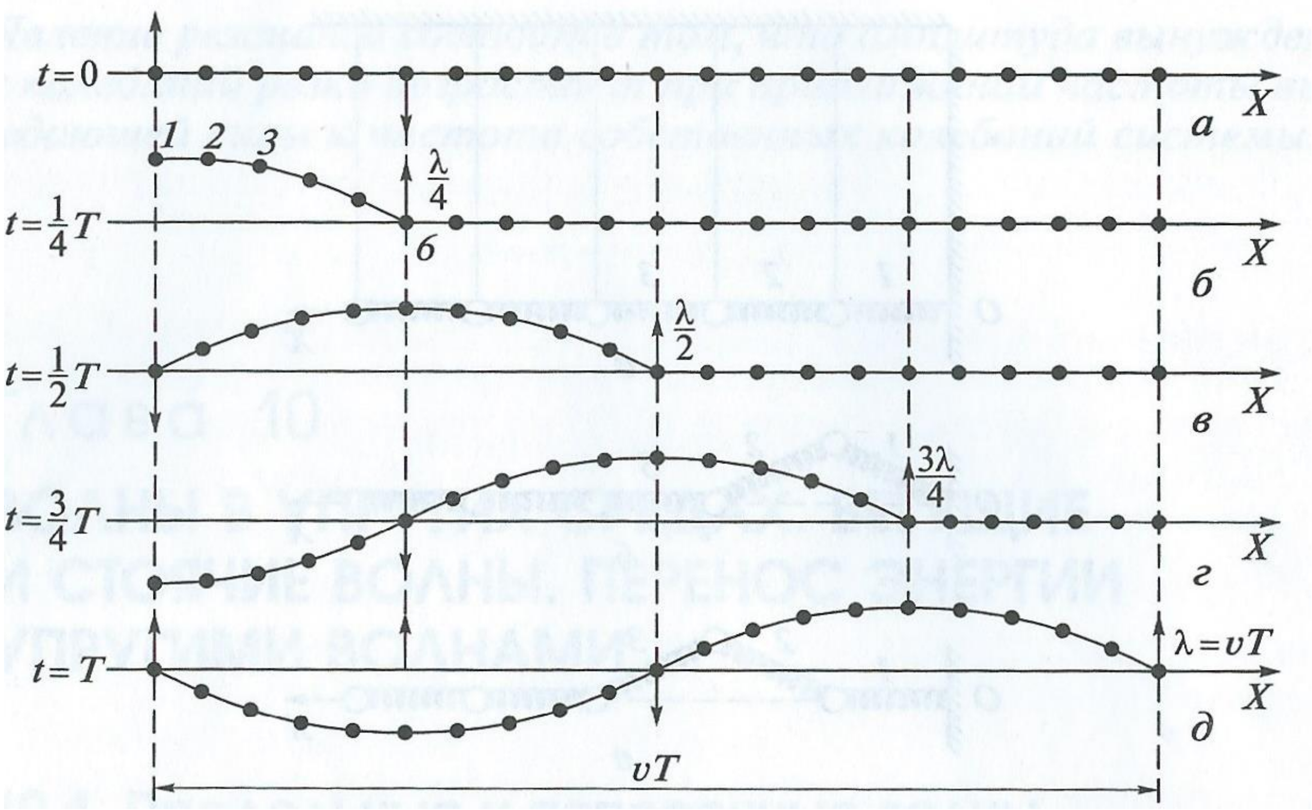


На рис. представлено распределение положений масс в последовательные моменты времени после того, как при t=0 первая масса приходит в состояние гармонических колебаний $\xi = \xi_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}$

1.Все массы в покое, момент t=0 (рис. а).

2.Расположение точек в момент, когда $t=T/4$: точка 1 занимает наиболее удаленное положение относительно положения равновесия, точка 2 еще не дошла до него, еще больше отстает точка 3, а начиная с точки 6 все последующие точки будут еще находиться в покое (рис. б). Достигнув наиболее удаленного положения, точка 1 пойдет обратно, а точка 2 будет еще более удаляться; затем и она достигнет наибольшего удаления и начнет двигаться к положению равновесия, все время отставая от точки 1.

Длина волны



3. Расположение точек в момент, когда $t=T/2$, точка 1 вернулась в положение равновесия (рис.).

4. Расположение точек к моментам $t=3T/4$ и $t=T$ (рис. г, д) Через $t=T$ весь ряд точек уже будет выведен из состояния покоя и расположится по волнообразной кривой, имеющей форму одного периода синусоиды.

Расстояние, на которое распространилось волновое движение за время T и равное $\lambda=vT$, *называется длиной волны*.

Зависимость смещения в волне от времени и расстояния

Выясним, как зависит величина ξ от времени и расстояния.
Пусть первая масса двигается по гармоническому закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Другая масса, расположенная от первой на расстоянии x, будет двигаться по такому же закону, но ее колебания начнутся позднее, и ее смещение будет описываться как $\xi = \xi_0 \sin \omega (t - t')$, где t' – время распространения волнового движения от первой точки (x=0) до точки, лежащей на расстоянии x от нее. Очевидно, что $t' = \frac{x}{v}$ и, следовательно, другая масса будет двигаться по закону

$$\xi = \xi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \xi_0 \sin \left(\omega t - \varphi \right)$$

Зависимость смещения в волне от времени и расстояния

$$\xi = \xi_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \xi_0 \sin\left(\omega t - \varphi\right)$$

Видно, что точка, находящаяся на расстоянии *x* от начала цепочки, отстает по фазе от начальной точки на величину $\varphi = \frac{\omega x}{v}$. Уравнение можно представить в виде

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Имея в виду, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $vT=\lambda$. Это уравнение дает распределение смещений по цепочке в зависимости от времени *t* и координаты *x*; отметим также, что колебания частиц в точках, отстоящих друг от друга на λ, совершаются в одной фазе:

$$\varphi = \frac{\omega(x+\lambda)}{v} = \frac{\omega x}{v} + \frac{\omega\lambda}{v} = \frac{\omega x}{v} + 2\pi$$

Уравнение бегущей волны

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=\xi_0\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Итак, мы получили уравнение **бегущей волны.**
Действительно, пусть в момент времени t=0 мы имеем некоторый мгновенный профиль волны – распределение смещений вдоль оси x

$$\xi=\xi_0\sin\left(-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

Через время t' распределение смещений будет иметь вид

$$\xi=\xi_0\sin 2\pi\left(\frac{t'}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Это значит, что синусоида сдвинулась по оси x как целое, причем это движение происходит вдоль оси x с некоторой скоростью. Определим эту скорость.

Скорость бегущей волны

Пусть $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=\varphi_0$ – фаза волны в момент времени t в точке x. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\varphi_0}{dt}=\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{dt}=0$$

откуда следует, что $\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda}{T}$.

Это как раз скорость распространения волны. Волна «бежит» вдоль оси x со скоростью v – это значит, что *любое постоянное значение фазы волны φ_0 перемещается по оси x с этой скоростью.*

Стоячие волны

Когда две одинаковые волны распространяются в противоположных направлениях – навстречу друг другу, возникает так называемая **стоячая волна**. В такой волне возникают неподвижные точки – **узлы** и точки, в которых амплитуда колебаний максимальна – **пучности**.

Рассчитаем положения узлов и пучностей в стоячей волне, предварительно вычислив зависимость смещений в стоячей волне от времени и координаты.

Стоячие волны

Для двух волн одинаковой амплитуды, «бегущих» в одномерной упругой среде в противоположных направлениях – вдоль положительного и отрицательного направления оси X, имеем:

$$\xi_1 = \xi_{10} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \qquad \xi_2 = \xi_{10} \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

При наложении волн распределение смещений будет иметь вид:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{10} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \xi_{10} \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) =$$

$$= 2\xi_{10} \cos \frac{\omega x}{v} \sin \omega t = 2\xi_{10} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t$$

Стоячие волны: узлы

$$\xi = 2\xi_{10}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\omega t$$

Очевидно, что величина $2\xi_{10}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ – это амплитуда колебаний упругой среды, которая оказывается равной нулю в положениях, определяемых условием $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$, откуда

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2},\, x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

В этих точках находятся «узлы» стоячей волны.

Стоячие волны: пучности

$$\xi = 2\xi_{10}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\omega t$$

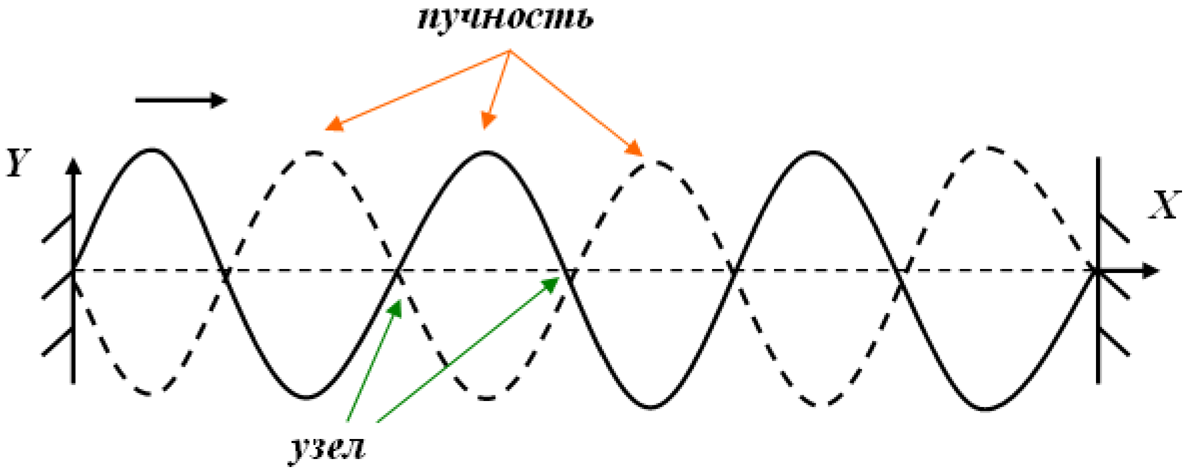
Условие для максимального отклонения (пучностей) имеет вид

$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 1$$

откуда $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi,$ откуда

$$x = \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Таким образом, расстояние между узлом и ближайшей пучностью равно $\frac{\lambda}{4}$



Стоячие волны

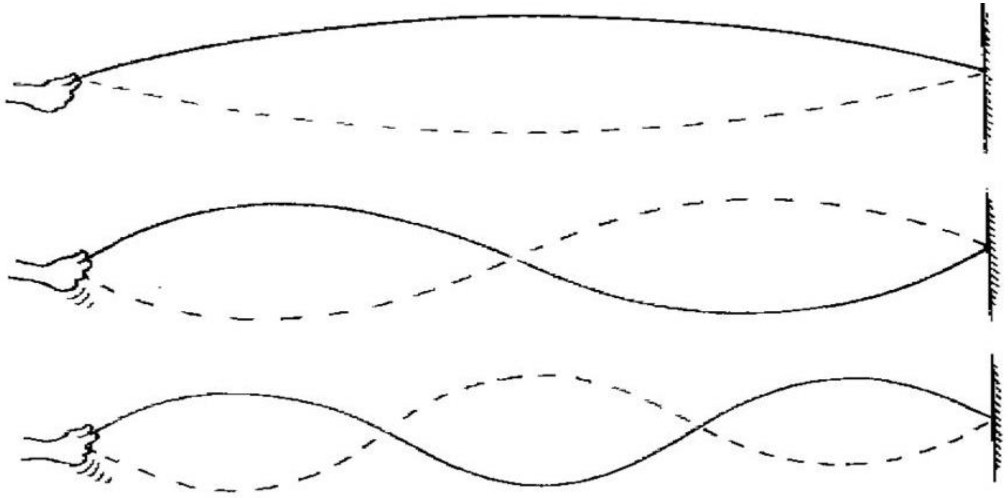
Ясно, что поскольку одна волна переносит энергию в прямом направлении, а другая – в противоположном, результирующий поток энергии по цепочке (жгуту) оказывается равным нулю.

Таким образом, стоячая волна – *это просто колебательный процесс в распределенной системе*.

В состоянии, соответствующем стоячей волне, каждая точка системы совершает колебания с определенной частотой, соответствующей частотам прямой и обратной волн. Ограниченную систему (резиновый шнур конечной длины) можно рассматривать как распределенную колебательную систему, имеющую собственные характерные частоты колебаний.

Стоячие волны

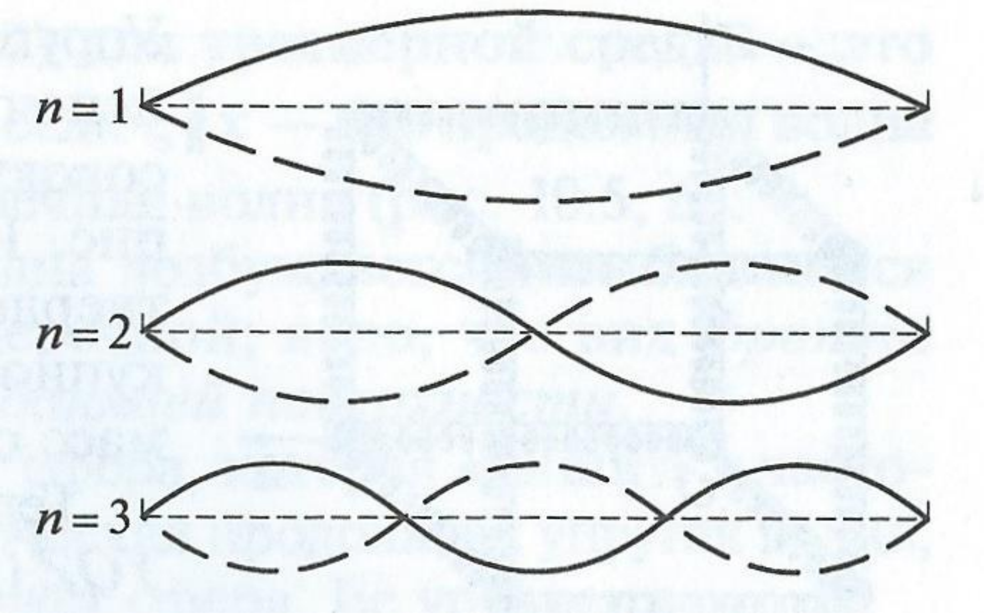
В качестве распределенной системы рассмотрим натянутый резиновый шнур, один конец которого закреплен, а другой может колебаться по гармоническому закону. В шнуре устанавливается стоячая волна, причем всякий раз, когда на длине шнура укладывается целое число полуволн, колебания шнура будут продолжаться и в том случае, когда свободный конец покоится. Такие колебания естественно назвать **собственными колебаниями** данной распределенной системы. Если длина шнура l, то условием возбуждения собственных колебаний будет уравнение



$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

где n = 1, 2, …, т.е. на длине шнура должно укладываться целое число полуволн.

Собственные частоты колебаний в стоячей волне



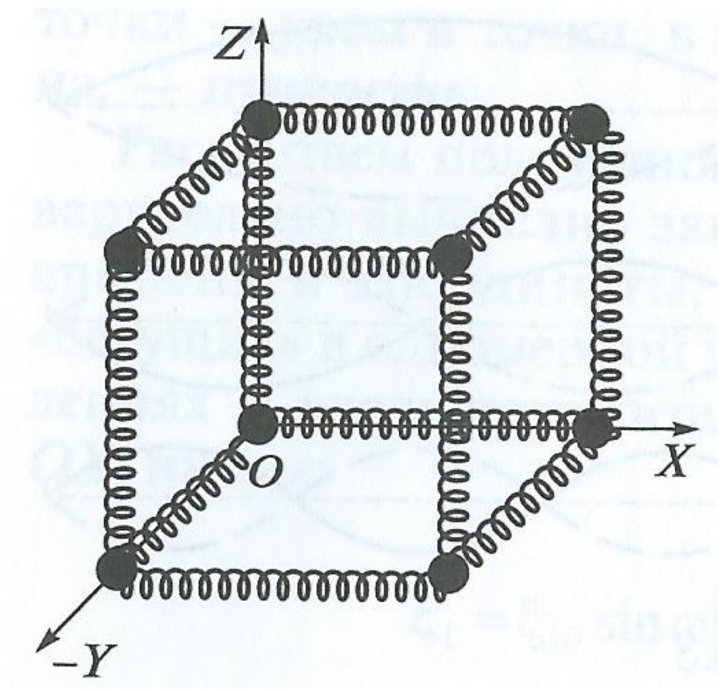
Собственные частоты этих колебаний зависят от размеров системы и (в отличие от локализованных систем типа маятников) может принимать бесконечно большое количество *дискретных* значений

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$$

$n = 1,2, \ldots$ (рис.).

Отметим также, что *в силу наличия сил трения колебательный процесс в реальном упругом теле будет затухать;* если к колеблющемуся телу приложить распределенную или локальную вынуждающую силу $F = F_0 \sin\Omega t$, то при $\Omega = \omega_n$ в упругом теле будут возникать **резонансные явления** – увеличение амплитуды колебаний на частотах, близких к частотам собственных колебаний.

Волны в трехмерных средах

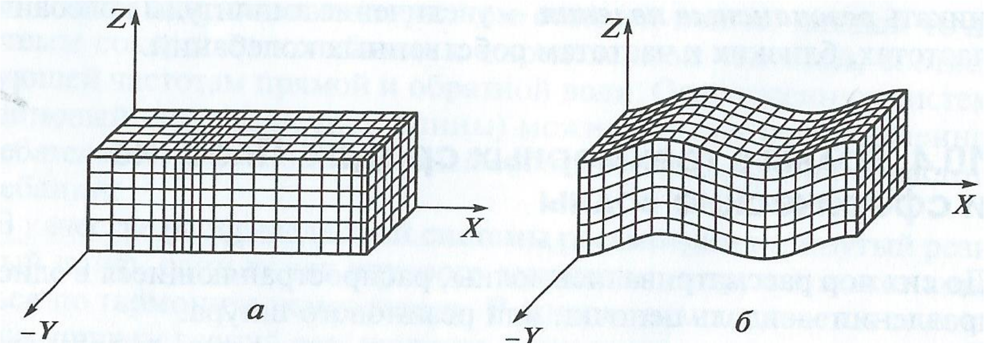


До сих пор мы рассматривали волну, распространяющуюся в одном измерении – *вдоль цепочки или жгута*.

Волны в трех измерениях – в газах, жидкостях, твердых телах, очень похожи на эти и описываются сходными уравнениями. Упругое пространство вместо одномерной цепочки мы будем теперь рассматривать как совокупность ячеек, представленных на рис. Модель трехмерного упругого твердого тела есть, по существу совокупность связанных линейных систем – масс с пружинками или жгутов.

Волны в трехмерных средах

Теперь представим себе, что плоскость *YZ* (см. рис.) в каждой ее точке двигается по гармоническому закону $\xi = \xi_0 \sin\omega t$, причем плоскость *ZY* совершает колебания со смещениями $\vec{\xi}$ либо перпендикулярно оси *X*, либо вдоль оси *X*. Фактически *это колебания множества упругих жгутов, которые все вместе составляют то, что называют упругой средой*. Их возбуждение происходит одновременно с движением плоскости *YZ*; *до любой координаты x возбуждение будет доходить за одно и то же время, и смещение* $\vec{\xi}$ *в плоскости x=const будет иметь одну и ту же величину, не зависящую от y и z*



$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Плоская волна и ее характеристики

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

Это уравнение так называемой **плоской волны**, для которой во всех точках любой плоскости, перпендикулярной оси X колебания будут происходить с одинаковой фазой и амплитудой (так как y и z не входят в уравнение волны).

Поверхность, до которой дошло возмущение в волне, называется **фронтом волны**

Поверхность, во всех точках которой смещение среды имеет одну и ту же фазу и амплитуду, называются **волновой поверхностью.**

Волны, для которых волновая поверхность представляет собой плоскость, называются **плоскими**.

Следовательно, уравнение для трехмерной среды – это уравнение плоской волны, причем, если $\vec{\xi} \parallel x$ – это продольная волна, если же $\vec{\xi} \perp x$ – это поперечная волна.

Сферическая волна

В рассмотренном случае плоская волна возбуждается колеблющейся плоскостью, и волна является поперечной; ясно, что вид *фронта волны зависит от формы возбуждающей поверхности*.

Пусть такой поверхностью будет сфера, которая «дышит» с частотой ω. При этом возбуждается сферическая продольная упругая волна, волновой поверхностью которой будет сфера. Ее уравнение

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_0(r)\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

где r – расстояние от центра сферы до выбранного фронта волны.

Сферическая волна

В сферической волне амплитуда колебаний среды $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}_0(r)$ уменьшается при удалении от источника. Почему – это мы сейчас узнаем. Для этого нужно рассмотреть *перенос энергии упругими волнами*. То, что волна переносит энергию, это ясно: участки среды поочередно вовлекаются в колебательное движение и приобретают кинетическую и потенциальную энергии. *Энергия переносится вместе с волной и со скоростью ее распространения*.

Перенос энергии упругими волнами

Введем новое понятие – *интенсивность волны*.

Интенсивность волны – *это количество энергии, которое проходит за одну секунду через один квадратный метр поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны*.

Рассмотрим небольшой объем ΔV с массой Δm, который колеблется в упругой среде с амплитудой ξ_0

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Перенос энергии упругими волнами

Амплитуда скорости в колебательном процессе $v_\xi = \frac{d\xi}{dt} = \omega\xi_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

Следовательно, максимальная кинетическая энергия (она же – полная энергия) элемента Δm

$$\Delta K_{\max} = \frac{\Delta m\left(\omega\xi_0\right)^2}{2}$$

Энергия, приходящаяся на единицу объема упругой среды (то есть **плотность энергии**)

$$\frac{\Delta K_{\max}}{\Delta V} = \frac{\rho\left(\omega\xi_0\right)^2}{2}$$

Здесь $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ - плотность среды.

Перенос энергии упругими волнами

Эта энергия переносится в пространстве со скоростью *v* распространения упругой волны.

Количество энергии, которая пройдет за 1 секунду через S = 1 м^2 *поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны, находится в объеме S·v.* Поэтому интенсивность волны

$$I = \frac{\Delta K_{\max}}{\Delta V} \cdot v = \frac{1}{2}\rho \xi_0^2 \omega^2 v$$

Эта энергия перемещается в направлении вектора $\vec{v}$ поэтому целесообразно ввести интенсивность волны как векторную величину

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\rho \xi_0^2 \omega^2 \vec{v}$$

Перенос энергии упругими волнами

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2\vec{v}$$

которая показывает не только, какое количество энергии переносится волной за 1 с через 1 м^2 поверхности, но и направление этого переноса, совпадающее с направлением вектора $\vec{v}$.

Амплитуда сферической волны

Теперь вернемся к сферической волне. Рассмотрим фронт сферической волны в некоторый момент времени. Его поверхность $4\pi r^2$, r – радиус сферы волнового фронта.

Очевидно, через сферу радиуса r за 1 с проходит энергия, равная $4\pi r^2 I$.

Из закона сохранения энергии следует, что для любого r $4\pi r^2 I = const$, то есть,

$$\frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2 v 4\pi r^2 = const$$

откуда $\xi_0^2 r^2 = const'$, то есть $\xi_0 \sim \frac{1}{r}$ – при удалении от источника сферической волны ее амплитуда уменьшается, как $\frac{1}{r}$

Амплитуда плоской волны

Отметим, что для идеальной *плоской* волны интенсивность переносимой энергии не зависит от расстояния до источника колебаний. В реальных упругих средах амплитуда колебаний в плоской волне постоянно затухает, и это связано с силами трения – переходом механической энергии волны во внутреннюю энергию среды, в которой волна распространяется.

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,

С. 90-98.

Видеоматериалы по теме лекции смотрите на сайте swcusp.ukit.me в разделе «видеоматериалы»:

«Длина волны», «Поперечные волны», «Продольные волны», «Стоячие волны»

Тема следующей лекции: Основные понятия молекулярной физики и термодинамики