Тема семинара:
Потенциал электростатического поля. Электроемкость

Основные разделы семинара:

1. Работа и энергия в электростатическом поле
2. Потенциал и разность потенциалов
3. Электроемкость

Работа сил электростатического поля

Элементарная работа d*A*, совершаемая кулоновскими силами при малом перемещении $d\vec{l}$ точечного заряда *q* в электростатическом поле, равна

$$dA = (\vec{F}d\vec{l}\,) = q(\vec{E}d\vec{l}\,) = qEdl\cos(\vec{E}, d\vec{l}\,)$$

где $\vec{E}$ — напряженность поля в месте нахождения заряда *q*.

Работа кулоновских сил при конечном перемещении заряда *q* из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = q\int_1^2 \left(\vec{E}\mathrm{d}\vec{l}\,\right) = q\int_1^2 E\mathrm{d}l\cos(\vec{E}, d\vec{l}\,) = q\int_1^2 E_l\mathrm{d}l$$

где E_l — проекция вектора напряженности на направление *l*.

Для точечного заряда *q* в вакууме работа по его перемещению из точки 1 в точку 2 в поле другого точечного заряда *Q* равна

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Работа сил электростатического поля

Для точечного заряда q в вакууме работа по его перемещению из точки 1 в точку 2 в поле другого точечного заряда Q равна

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точек 1 и 2 до заряда Q.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда q не зависит от формы траектории заряда, т.е. электростатическое поле является потенциальным полем.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда q вдоль любого замкнутого контура l равна 0, так как в этом случае $r_1 = r_2$.

Потенциал электростатического поля

Потенциалом электростатического поля в данной точке называется отношение потенциальной энергии $W_п$ пробного заряда q_0, находящегося в некоторой точке поля, к величине этого заряда:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_n(\vec{r})}{q_0} = \int_{r_0}^{\infty} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r}$$

Потенциалом электрического поля точечного заряда называется величина, равная работе по переносу единичного положительного заряда из данной точки пространства на бесконечность.

$$\varphi = \int_{r}^{\infty} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{r}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Потенциал электростатического поля

Потенциал электрического поля заряженной сферы радиуса R при $R \le r$ равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

при $r > R$ $\quad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$, здесь q — заряд сферы.

Разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ равна интегралу

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 E_l \mathrm{d}l$$

Разность потенциалов поля точечного заряда равно работе по перемещению единичного заряда в поле точечного заряда:

$$A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2$$

Потенциальная энергия электростатического поля

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Потенциальная энергия системы N точечных зарядов q_i с радиус-векторами r_i

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{2\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Работа сил поля при малом перемещении dl заряда q в электростатическом поле равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}W = -q\mathrm{d}\varphi = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)$$

Связь напряженности и потенциала

Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля имеет вид

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

т.е. напряженность электростатического поля равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциала:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$$

Проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстроте убывания потенциала поля на единицу длины в этом направлении:

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}$$

Вдоль силовой линии E_l достигают максимального значения, равного E.

Задача 1.

Электрическое поле создано точечным зарядом. В точке, удаленной от заряда на r = 0,1 м, потенциал поля φ_1 = 25 В. Определить величину напряженности поля E в этой точке.

Ответ: $E = \dfrac{\varphi_1}{r}$ =250 В/м.

Задача 2.

Четыре одинаковых точечных заряда q = 1 нКл расположены вдоль прямой на расстоянии a = 0,1 м друг от друга. Какую работу необходимо совершить, чтобы поместить заряды в вершины квадрата со стороной a = 0,1 м?

Ответ: $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \approx 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 3.

Бесконечно длинный полый цилиндр радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда σ. Определить потенциал электрического поля цилиндра.

Ответ. При $r < R$ $\varphi = 0$, при $r > R$ $\varphi(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{R}{r}\right)$

Электроемкость

Электроемкость уединенного проводника — физическая величина, измеряемая отношением изменения заряда проводника к изменению его потенциала $C = \Delta q\ /\ \Delta\varphi$. Другая формулировка: электроемкостью двух проводников называют отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между этим проводником и соседним.

Электроемкость зависит от размеров и формы проводников, диэлектрической проницаемости среды, в которую они помещены, и расположения окружающих тел, но не зависит от материала проводника. В системе СИ за единицу электрической емкости принимается фарада (Ф).

Электроемкость уединенного проводящего шара радиуса R равна

$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$.

Электроемкость плоского конденсатора

Конденсаторы представляют собой два проводника, разделенных слоем воздуха или диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводника. Проводники в этом случае называют обкладками конденсатора.

Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Электроемкость плоского конденсатора

$C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d$,

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, находящейся между пластинами конденсатора; ε_0 — электрическая постоянная; S — площадь одной пластины; d — расстояние между пластинами.

Соединение конденсаторов

Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей всех конденсаторов

$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n.$

При последовательном соединении складываются обратные величины их емкостей.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Энергия заряженного конденсатора

Энергия заряженного конденсатора увеличивается с увеличением заряда на его пластинах

$W = q\Delta\varphi / 2$,

где q — заряд конденсатора; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между его обкладками.

Использовав формулу $q = C\Delta\varphi$, можно также записать

$W = q^2 / 2C = C\Delta\varphi^2 / 2$.

Объемная плотность электростатической энергии поля плоского конденсатора

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$$

Задача 4.

Найти электроемкость цилиндрического конденсатора, состоящего из двух тонкостенных коаксиальных металлических цилиндров высотой h и радиусами r_1 и r_2, между которыми находится диэлектрик с проницаемостью ε.

Ответ: $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

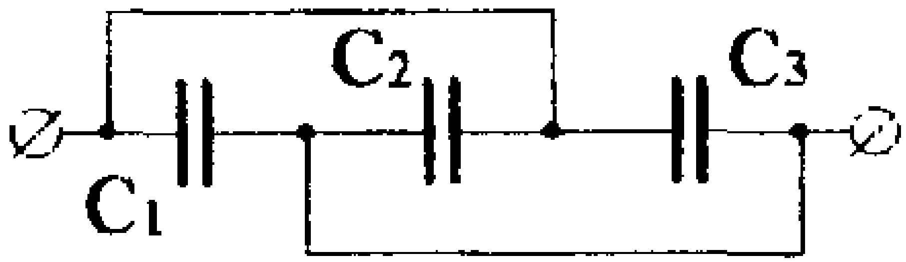
Задача 5

Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C = 40 мкФ каждый заряжены до разности потенциалов U_1 = 60 В и U_2 = 260 В. Одноименные пластины конденсаторов соединили проводниками. Какое количество теплоты при этом выделилось?

Ответ: $Q = \dfrac{C(U_2 - U_1)^2}{4}$ = 0,4 Дж.

Задача 6

Определить емкость системы конденсаторов (рис.).



Домашнее задание

Задачи 3.2.25, 3.2.29, 3.3.31, 3.3.33.