Тема лекции:

Периодические движения в механике. Гармонические колебания. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.

Какие механические системы могут совершать гармонические колебания?

Эти системы должны находиться в состоянии устойчивого равновесия.

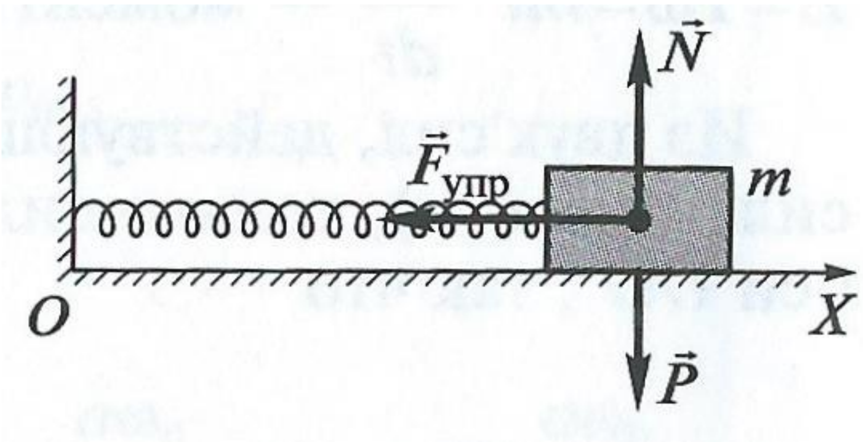
При выведении системы из положения равновесия должна возникать сила, возвращающая систему в положение равновесия и пропорциональная величине отклонения:

$$F = -kx.$$

Это упругая (или квазиупругая) сила. Второй закон Ньютона в этом случае имеет вид

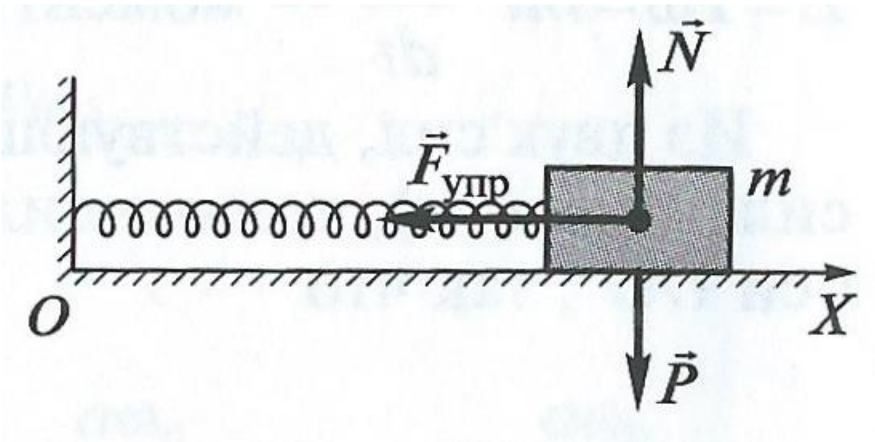
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Пружинный маятник



Простейшей системой, описываемой этим уравнением, является пружинный маятник (см. рис.). Масса m расположена на подставке, на которой она может двигаться без трения в горизонтальном направлении под действием упругой силы растянутой или сжатой пружины, направленной вдоль оси x. В вертикальном направлении на тело действуют две силы – сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$, которые равны по величине и противоположны по направлению.

Пружинный маятник



При выведении массы m из положения равновесия она начинает двигаться под действием упругой силы растянутой или сжатой пружины, направленной вдоль оси x. Уравнение движения массы

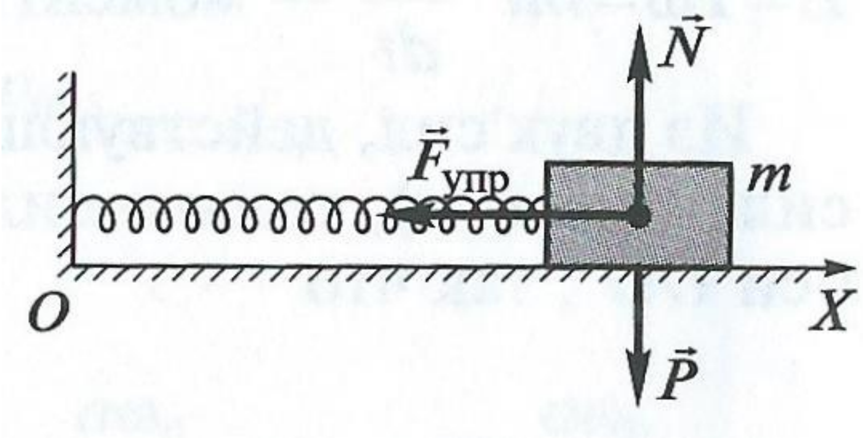
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

можно привести к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$



это уравнение колебаний под действием упругой силы (**уравнение гармонического осциллятора**).

Предполагаемое решение:

$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$,

A, φ - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Уравнение гармонического осциллятора

$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$,

Находим $\frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Подставляем в исходное уравнение

$$-A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} A\sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

откуда видно, что тождество получается при значении $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

ω_0 – собственная частота колебаний;

таким образом, решение имеет вид $x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$

Параметры гармонических колебаний

$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют **смещением** x.

Максимальное смещение - наибольшее расстояние от положения равновесия - называется **амплитудой** A.

Выражение, стоящее под знаком синуса или косинуса $\omega_0 t + \varphi$ определяет смещение x в данный момент времени t и называется **фазой колебания**. Фаза измеряется в радианах и определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени.

Величина φ называется **начальной фазой колебания** и определяет смещение в начальный момент времени ($t = 0$).

Частота колебаний ν определяется как число полных колебаний в 1 секунду.

Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен одному полному колебанию в секунду.

Параметры гармонических колебаний

$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

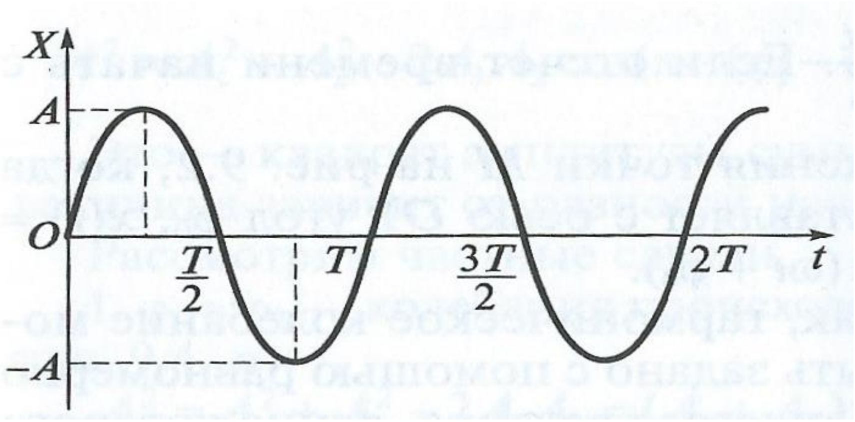
Период колебаний $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Для пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

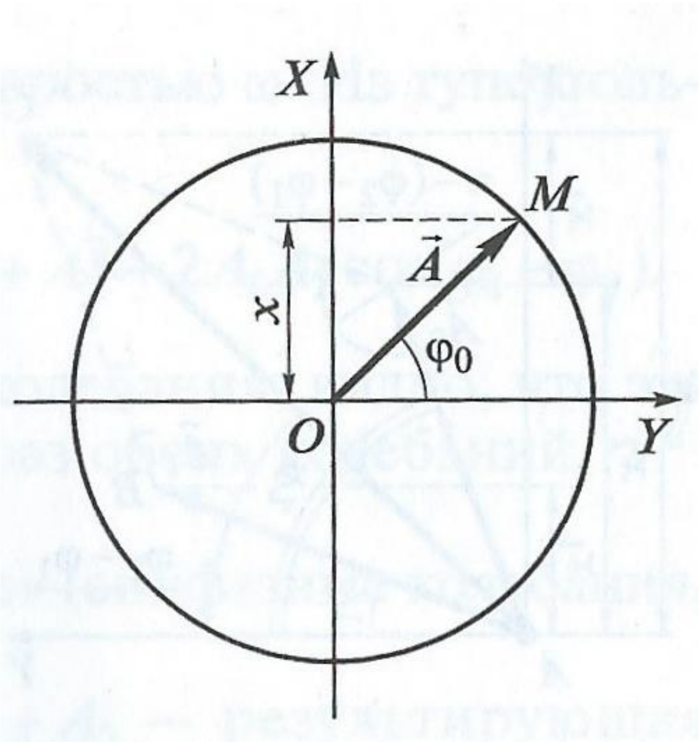
Легко определить **скорость** и **ускорение** точки, двигающейся по гармоническому закону вдоль оси x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Эти параметры также изменяются по гармоническому закону. Заметим, что *максимальное значение скорости в положении равновесия* $v_{max} = A\omega$, *максимальное значение ускорения в крайних положениях* $a_{max} = A\omega^2$.

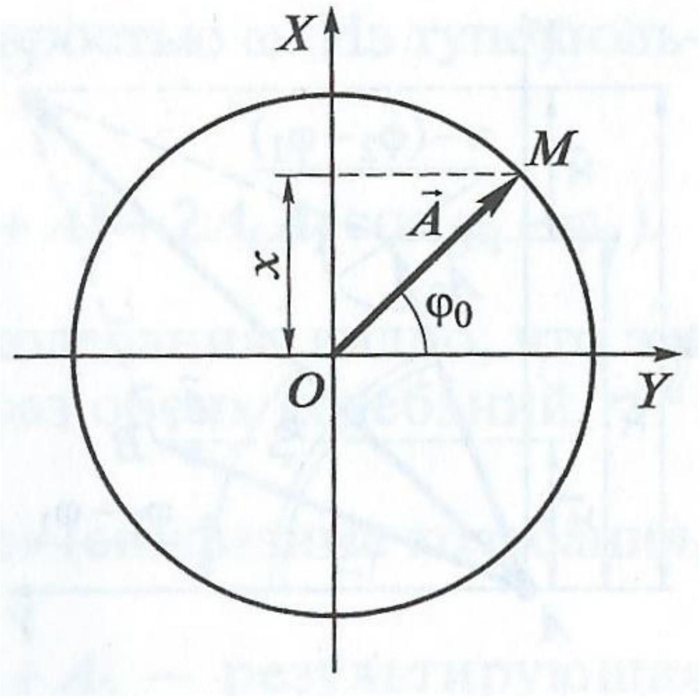


Гармонические колебания и движение по окружности



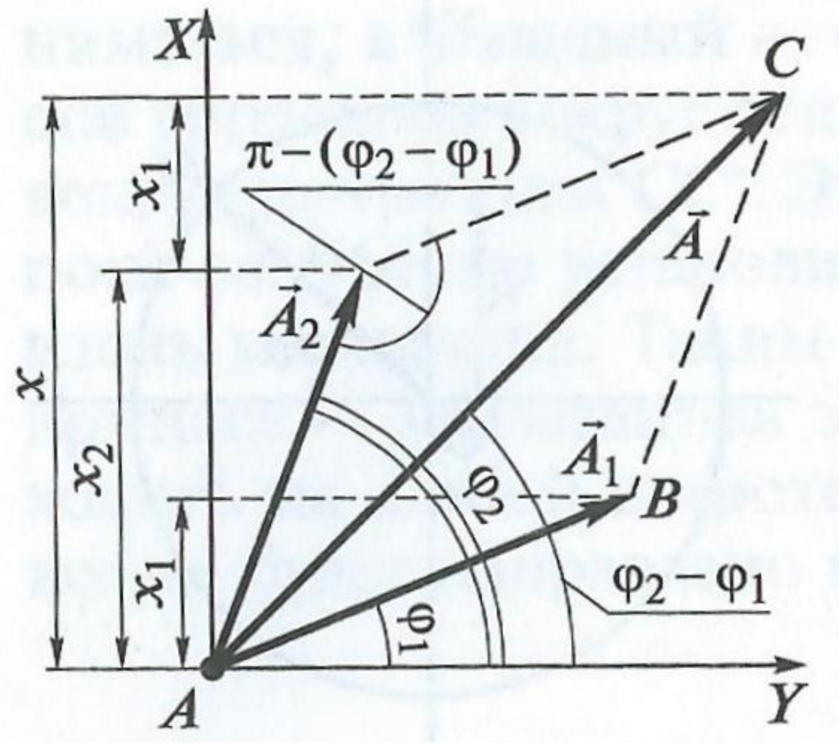
Полезная и наглядная модель, описывающая гармонические колебания, состоит в следующем. Пусть точка M равномерно двигается по окружности радиуса A с угловой скоростью ω (рис.). Ее положение задается радиус-вектором $\vec{A}$.
Угол между $\vec{A}$ и и осью у равен φ. Тогда проекция вектора $\vec{A}$ на на ось x $x = A\sin\varphi$, $\varphi = \omega t$, следовательно, $x = A\sin\omega t$.

Гармонические колебания и движение по окружности



Таким образом, при равномерном движении точки по окружности проекция ее радиуса-вектора на ось x совершает гармоническое колебание с частотой $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Если отсчет времени начать с положения M на рис., когда $\vec{A}$ составляет с осью y угол φ_0, $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.
Итак, гармоническое колебание может быть задано с помощью равномерно вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания и вращение осуществляется с угловой скоростью ω.

Сложение однонаправленных колебаний



Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

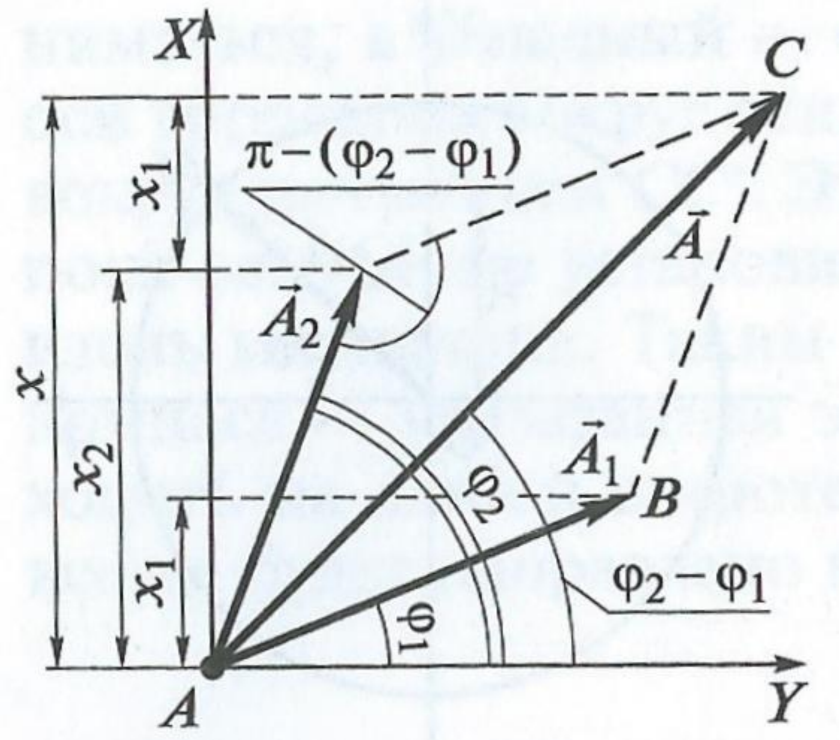
$x_1(t)=A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$

$x_2(t)=A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$

Представим оба колебания с помощью векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, вращающихся с частотой ω (см. рис.).

Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$

Сложение однонаправленных колебаний



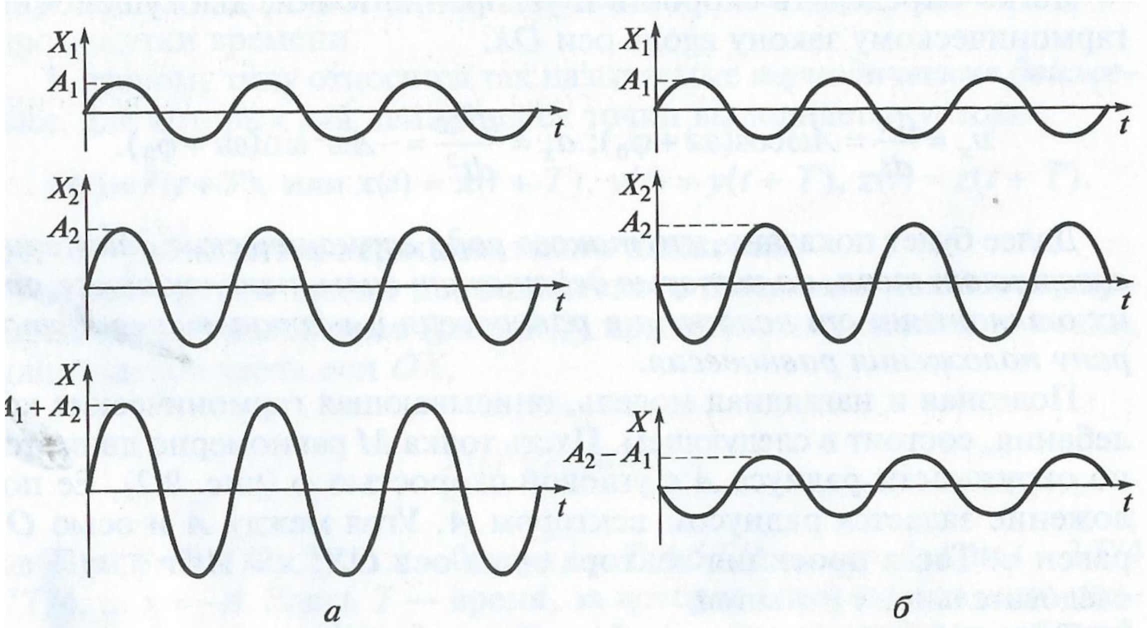
Видно, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций складываемых векторов: $x = x_1 + x_2$.

Вектор $\vec{A}$ вращается с той же угловой скоростью ω. Из тупоугольного треугольника ABC по теореме косинусов имеем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Сложение однонаправленных колебаний

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



Это – квадрат амплитуды суммарного колебания; видно, что эта величина зависит от разности начальных фаз обеих колебаний.

Рассмотрим частные случаи:

1. $\varphi_1 = \varphi_2$ – колебания происходят «в фазе» (синфазные колебания, рис. а):

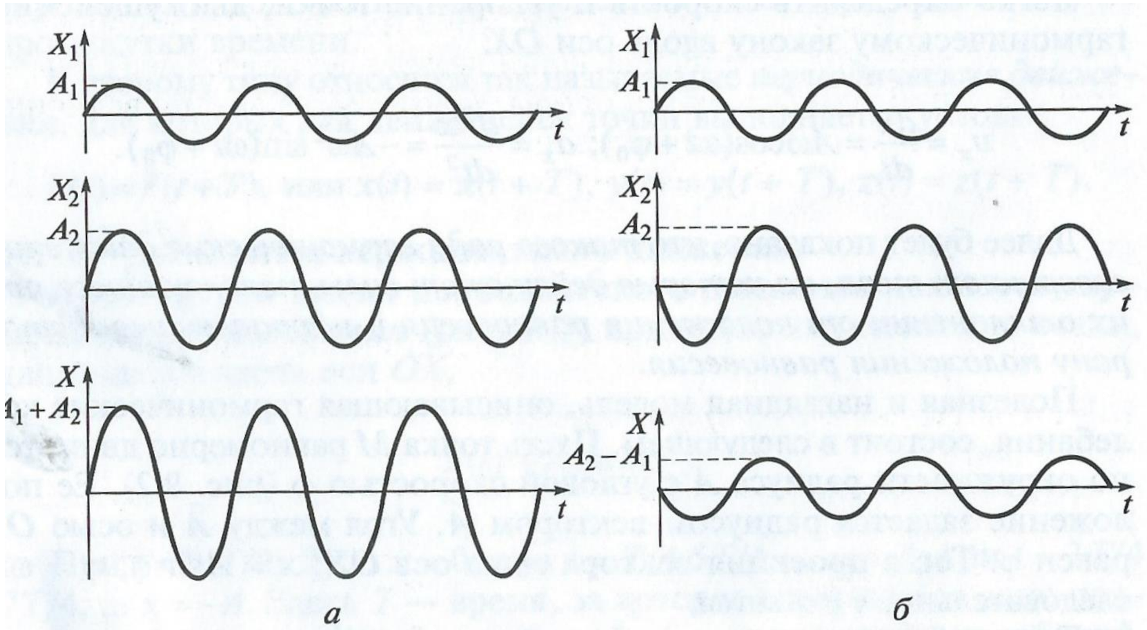
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$$A = A_1 + A_2$$

результирующая амплитуда равна сумме амплитуд складывающихся колебаний.

Сложение однонаправленных колебаний

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



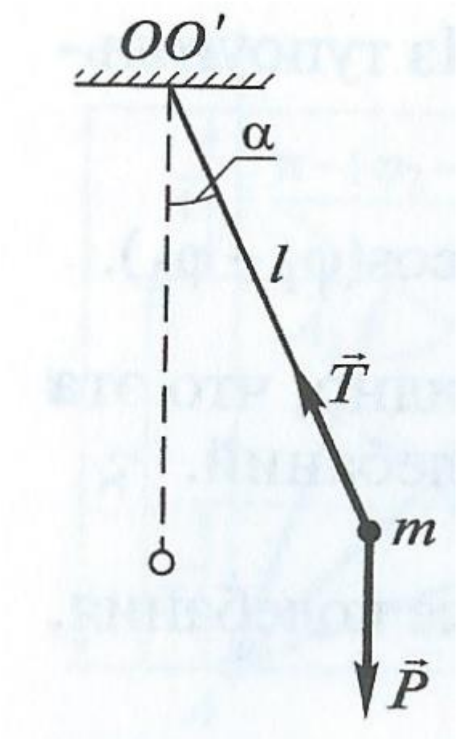
2. $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ - колебания происходят «в противофазе» (противофазные колебания, рис. б):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

$$A = A_1 - A_2$$

- результирующая амплитуда равна разности амплитуд складывающихся колебаний.

Математический маятник

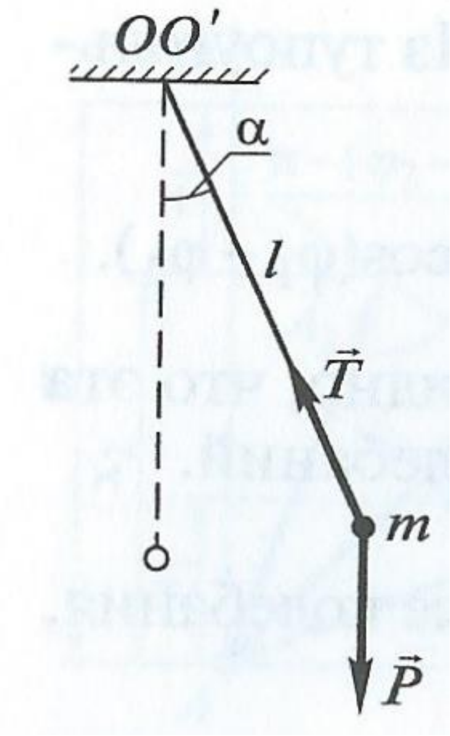


Рассмотрим еще одну колебательную систему, в которой возникают гармонические колебания – математический маятник (рис.).

Точечная масса m висит на нерастяжимой невесомой нити, при отклонении нити на малый угол α начинаются колебания маятника относительно положения равновесия $\alpha = 0$.

Каков период колебаний такого маятника?

Математический маятник

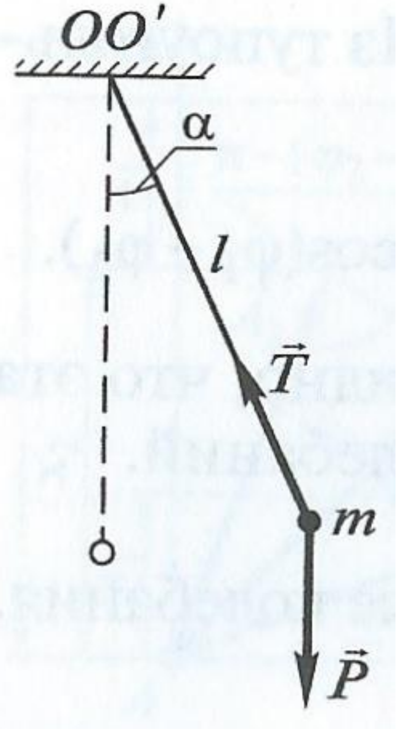


Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку подвеса: $\frac{dL}{dt} = \vec{N}$,
где $\vec{N}$ - момент действующих на массу сил (относительно оси OO'), а $L = I\omega = ml^2 \frac{d\alpha}{dt}$
- момент импульса относительно этой же оси.

Из двух сил, действующих на m, $\vec{T}$ - натяжение нити, $\vec{P} = m\vec{g}$ - сила тяжести, только сила тяжести создает момент относительно оси OO', так, что

$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$$

Математический маятник



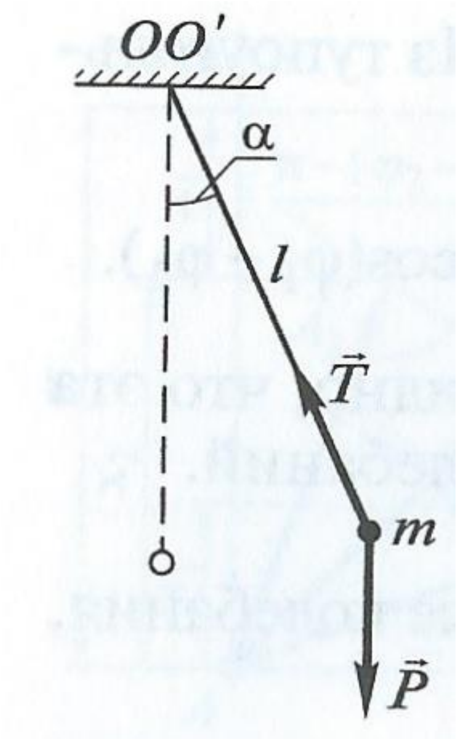
Для малых α $\sin\alpha \approx \alpha$, поэтому

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Имеем **уравнение гармонического осциллятора**, решение которого $\alpha = \alpha_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$; рассуждая аналогично случаю пружинного маятника, получаем для квадрата собственной частоты колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Математический маятник



Период колебаний

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Заметим, что период не зависит от массы маятника и определяется его длиной и ускорением свободного падения.

Роль начальных условий

Отметим, что полученные решения уравнения гармонического осциллятора справедливы при любых значениях амплитуды и фазы колебаний. Эти «свободные постоянные» A и φ_0 - амплитуда и начальная фаза - зависят от **начальных условий** – положения и скорости колеблющейся массы в начальный момент времени $t = 0$.

Движение маятника может начинаться по-разному.

1. Мы можем отклонить маятник и отпустить.
2. Мы можем сообщить ему начальную скорость при нулевом отклонении.
3. Мы можем отклонить маятник и затем сообщить ему скорость.

Итак, задаем начальные условия для последнего случая:

Роль начальных условий

При $t = 0$ $x = a$, $v = \dfrac{dx}{dt} = v_0$. Поскольку общее решение имеет вид $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,

при $t = 0$ имеем

$a = A\sin\varphi_0$,

$\dfrac{dx}{dt} = A\omega_0\cos\varphi_0 = v_0$.

Поэтому $\sin\varphi_0 = \dfrac{a}{A}, \cos\varphi_0 = \dfrac{v_0}{A\omega_0}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{a\omega_0}{v_0}$ $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{a\omega_0}{v_0}$

Кроме того
$$\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = \frac{a^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega_0^2} = 1,$$

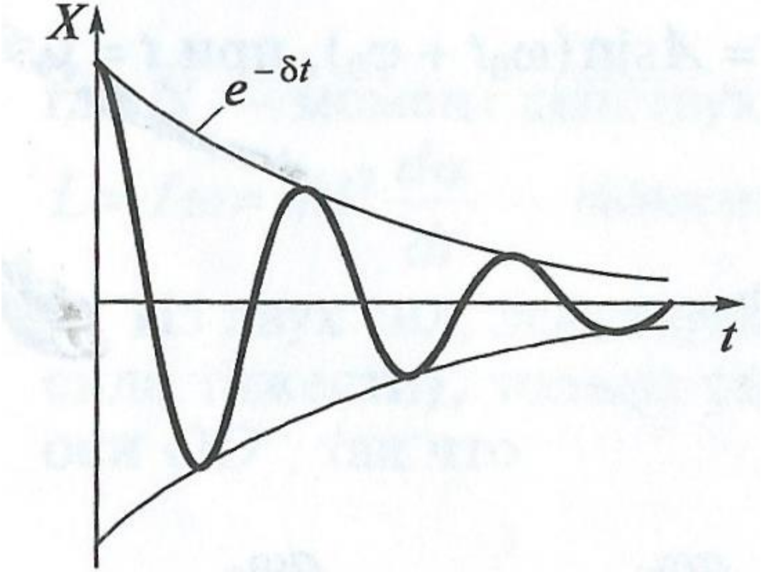
откуда
$$A^2 = a^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}, A = \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Роль начальных условий

Полное решение задачи для гармонического осциллятора с учетом начальных условий имеет вид

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \operatorname{arctg} \frac{a\omega_0}{v_0} \right)$$

Затухающие колебания



Для идеального гармонического осциллятора амплитуда неизменна во времени, а полная энергия постоянна: $\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=\frac{kA^2}{2}$ и равна потенциальной энергии максимально сжатой или растянутой пружины.

Однако в реальности амплитуда изменяется во времени, а именно, уменьшается (рис.), и это означает, что механическая энергия системы также *уменьшается*. Это связано с действием непотенциальных сил трения, *работа которых уменьшает механическую энергию системы*.

Затухающие колебания

Рассмотрим модель, в которой маятник движется в вязкой среде, и сила трения пропорциональна скорости движения: $\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$. Знак «минус» означает, что сила трения всегда направлена противоположно вектору скорости тела, r – коэффициент вязкого трения.

Тогда уравнение движения горизонтального пружинного маятника принимает следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Затухающие колебания

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Обозначим $\dfrac{r}{m}=2\delta$ $\dfrac{k}{m}=\omega_0^2$. Тогда $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\delta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$

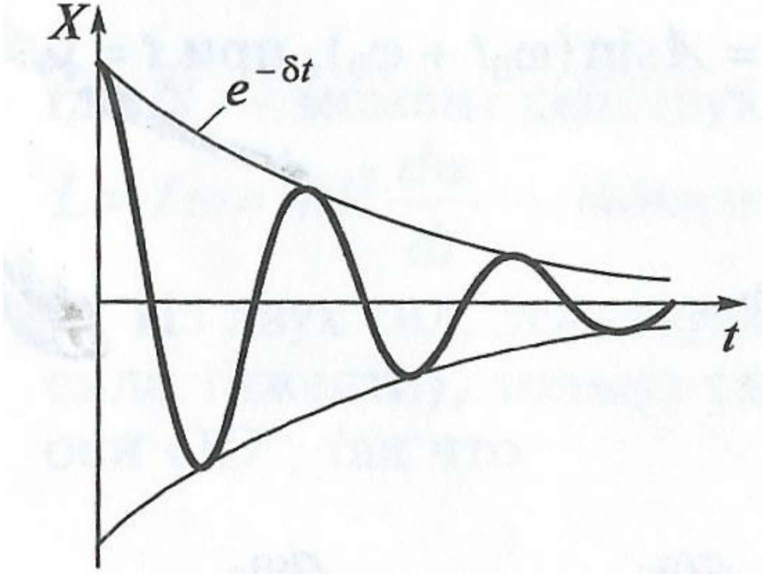
Решением этого уравнения, как можно проверить прямой подстановкой, является функция

$x=Ae^{-\delta t}\sin(\omega^*\cdot t+\varphi)$, где $\delta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r}{m},\omega^{*2}=\omega_0^2-\delta^2$

Как видно, решение уже не является гармоническим законом и представляет из себя произведение экспоненты $e^{-\delta t}$ и синусоиды $\sin(\omega^*\cdot t+\varphi)$, описывающим уменьшение амплитуды колебаний со временем.

В итоге мы получаем *затухающее колебание*.

Затухающие колебания



Как видно из рис., решение уже не является гармоническим законом и представляет из себя произведение экспоненты $e^{-\delta t}$ и синусоиды $\sin(\omega^* \cdot t+\varphi)$, описывающим уменьшение амплитуды колебаний со временем (рис.).

В итоге мы получаем *затухающее колебание*.

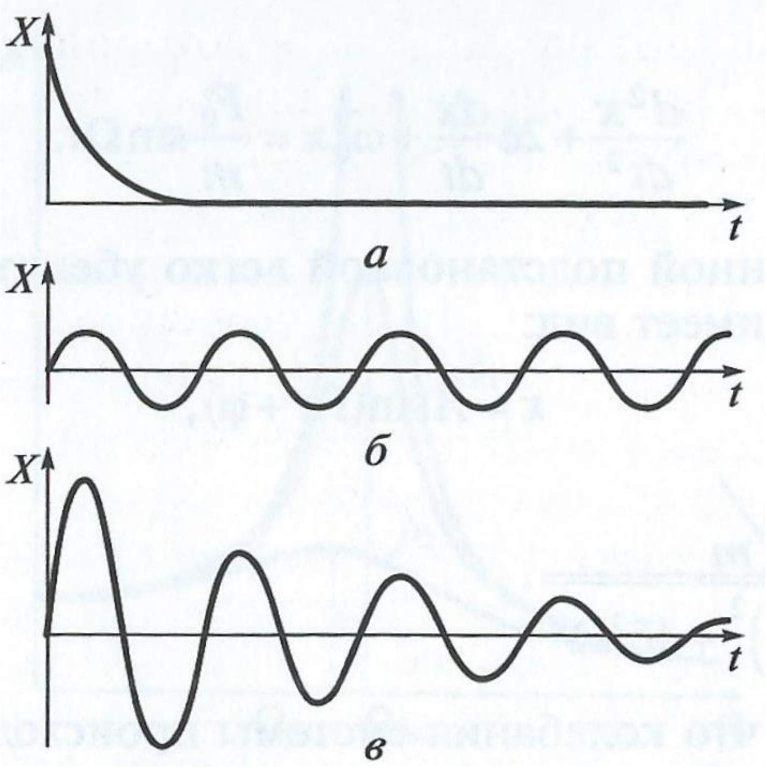
Декремент затухания

Как быстро уменьшается амплитуда со временем, можно определить величиной **декремента затухания Δ,** который равен отношению величин смещений маятника, разделенных промежутком времени, равным периоду колебаний:

$$\Delta = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{Ae^{-\delta t}\sin(\omega^* t)}{Ae^{-\delta(t+T)}\sin(\omega^*(t+T))} = e^{\delta T}$$

Величина $\beta = \ln\Delta = \delta T = \dfrac{2\pi\delta}{\omega_0^*}$ называется **логарифмическим декрементом затухания**.

Апериодический процесс



Отметим, что частота собственных колебаний уменьшается с увеличением трения $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{m}$ и величина $\omega^{*2} = \omega_0^2 - \delta^2$ может стать меньше нуля; тогда периодический процесс превращается в **апериодический –** отклоненное от положения равновесия тело плавно возвращается в исходное положение, как показано на рис. а. Для сравнения на рис. б приведен процесс незатухающих колебаний, а на рис. в – затухающих колебаний.

Вынужденные колебания

До сих пор мы рассматривали затухающие свободные колебания, по существу, в замкнутой системе, происходящие под действием потенциальных и непотенциальных внутренних сил. При наличии сил трения происходит постепенное превращение механической энергии в тепловую энергию, и периодичность колебаний пропадает т.к. их амплитуда уменьшается. Внешние силы только сообщали системе определенный начальный запас энергии.

Периодический колебательный процесс может быть восстановлен, если «подкачивать» в систему энергию с помощью внешнего гармонического воздействия, происходящего с частотой Ω.

Вынужденные колебания

В этом случае колебания осциллятора называются **вынужденными**. Уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=F_0\sin\Omega t$$

где $F=F_0\sin\Omega t$, – внешняя гармоническая вынуждающая сила, Ω – ее частота.

Вводя, как и ранее, следующие обозначения

$$2\delta=\frac{r}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\sin\Omega t$$

Вынужденные колебания

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение этого уравнения имеет вид: $x = A\sin(\Omega t + \varphi)$

где

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Это означает, что колебания системы происходят на частоте вынуждающей силы. Видно, что величина A амплитуды вынужденных колебаний определяется соотношением между частотой собственных свободных колебаний системы ω_0 и частотой внешней вынуждающей силы Ω. Если $\Omega \to 0$ (очень медленные колебания вынуждающей силы), то амплитуда колебаний

$$A_{\text{стат}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

Вынужденные колебания. Резонанс

При увеличении Ω амплитуда увеличивается, поскольку уменьшается знаменатель в формуле

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

– до тех пор, пока знаменатель не достигнет минимального значения – происходит **резонанс**. При этом частота колебаний вынуждающей силы $\Omega = \Omega_{рез}$, последнюю можно определить условием

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega_{рез}^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega_{рез}^2\right] = 0$$

Вынужденные колебания. Резонанс

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega_{\text{рез}}^2\right)^2+4\delta^2\Omega_{\text{рез}}^2\right]=0$$

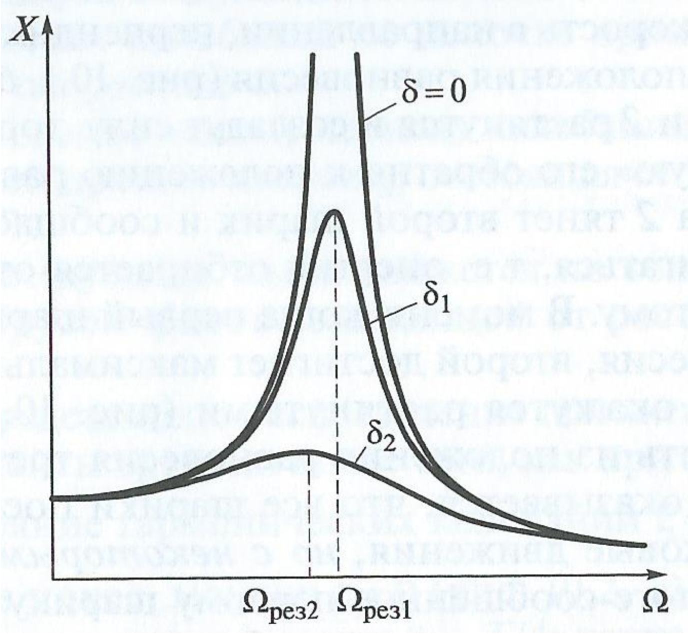
$$2\left(\omega_0^2-\Omega_{\text{рез}}^2\right)(-2\Omega_{\text{рез}})+8\delta^2\Omega_{\text{рез}}=0$$

$$\Omega_{\text{рез}}^2=\omega_0^2-2\delta^2$$

При этом амплитуда (для малых δ)

$$A_{\text{рез}}=\frac{F_0/m}{2\delta\omega_0}$$

Резонанс



При дальнейшем увеличении частоты Ω амплитуда начинает уменьшаться, так что зависимость $x(\Omega)$ имеет вид, представленный на рис. Видно, что амплитуда колебаний на частоте резонанса зависит от величины δ: чем меньше декремент затухания системы, тем больше амплитуда колебаний. На рис. $\delta_1<\delta_2$. При $\delta\to 0$ амплитуда колебаний на частоте резонанса стремится к бесконечности.

Явление резонанса состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний системы.

Литература

Б.А. Струков, Л.Г. Антошина, С.В. Павлов. Физика. М., 2011,

С. 80-90.

Видеоматериалы по теме лекции смотрите на сайте swcusp.ukit.me в разделе «видеоматериалы»:

«Маятник», «Гармонические колебания», «Затухающие колебания»

Тема следующей лекции: Волны в упругих средах